A. DUSCHEK — W. MAYER

# LEHRBUCH DER DIFFERENTIALGEOMETRIE

## BAND I

## KURVEN UND FLÄCHEN IM EUKLIDISCHEN RAUM

VON

ADALBERT DUSCHEK
PRIVATDOZENT AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE
WIEN

MIT 14 FIGUREN IM TEXT

1930
LEIPZIG UND BERLIN
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER

# Vorwort.

Dieses Lehrbuch umfaßt zwei Bände, von denen der erste die sogenannte elementare Differentialgeometrie behandelt, während der zweite den allgemeinen Riemannschen Räumen gewidmet ist. Die beiden Bände sind inhaltlich durchaus unabhängig voneinander, so daß insbesondere der zweite Band auch ohne Kenntnis des ersten lesbar ist. Es waren dadurch an vereinzelten Stellen Wiederholungen nicht zu vermeiden, doch haben wir stets getrachtet, dieselben durch Wahl verschiedener Gesichtspunkte nicht eintönig werden zu lassen. Der Anfänger allerdings, der von Differentialgeometrie noch nicht mehr kennt, als was in den Vorlesungen über Infinitesimalrechnung an geometrischen Anwendungen gebracht zu werden pflegt, wird gut daran tun, mit der Lektüre des zweiten Bandes nicht vor der des ersten zu beginnen.

Die Geometrie mehrdimensionaler Riemannscher Räume umfaßt die des dreidimensionalen euklidischen Raumes als Spezialfall. Trotzdem bedarf die getrennte Behandlung des letzteren im ersten Band wohl kaum einer näheren Begründung, die durch den Hinweis auf gewisse, teils überhaupt, teils nach dem gegenwärtigen Stand der Forschung nicht verallgemeinerungsfähige Probleme, durch den Hinweis auf den historischen Werdegang und schließlich durch Erwägungen didaktischer Natur leicht zu geben wäre. Dazu kommt noch die große Mannigfaltigkeit spezieller Fragestellungen, die gerade hier unser Interesse in besonderem Maße fesseln, weil sie den Anschauungsraum, das Nebeneinander unserer Sinneswelt widerspiegeln. So gut nun dieses Sonderinteresse zu verstehen ist und so wenig gegen dasselbe als mathematische Geschmacksrichtung prinzipiell gesagt werden kann, so sehr überspannt es seinen Anspruch in dem Augenblick, wo es diese Anschaulichkeit zum Wertmaßstab macht. In der Tat entziehen sich die mehrdimensionalen Räume so sehr jener Art von unmittelbarer Anschauung, wie sie etwa dem Techniker wertvoll ist, daß man sie „anfangs für Unsinn und später für Spielerei und unnützen Ballast“[1]) gehalten hat. Aber abgesehen von der erkenntnistheoretischen „Existenz“ und „Realität“ mehrdimensionaler Räume, die durch die Grundlagenforschung der letzten Jahrzehnte hinreichend geklärt erscheint, abgesehen auch von der Verwendung vier- und mehrdimensionaler Räume in

1) W. Wirtinger, *Allgemeine Infinitesimalgeometrie und Erfahrung*, Hamburger Abhandlungen, Sonderschrift 3, 1926.

der modernen Physik, muß nicht dem, der die Mathematik um ihrer selbst willen liebt, also die mathematische Idee an die Spitze stellt, die Beschränkung einer allgemein durchführbaren Spekulation auf einen Sonderfall als willkürlich und unverständlich erscheinen?

Im übrigen strebt auch die mehrdimensionale Differentialgeometrie nach Anschaulichkeit, und zwar nach jener allgemeinen mathematischen Anschaulichkeit, die immer dann entsteht, wenn ein seinen Zwecken angepaßter Kalkül die mathematischen Gesetzmäßigkeiten darstellt und durchleuchtet. Man mag über Wert oder Unwert des Formalismus für Entstehung und Entwicklung mathematischer Ideen urteilen wie man will, eines scheint uns festzustehen: die mathematische Idee an sich ist einfach und durchsichtig; verwickelt und undurchsichtig sind oft nur die Wege, auf denen wir sie suchen. Ebenso einfach und durchsichtig aber wie die mathematische Idee selbst ist ihre endgültige Fassung durch einen adäquaten Kalkül, und deshalb ist die Ausbildung eines solchen ein sicheres Zeichen für die Reife einer mathematischen Theorie. Dabei darf aber — was leider heute vielfach der Fall ist — der Kalkül niemals Zweck, immer nur Werkzeug, Mittel zum Zweck sein! Nichts liegt uns ferner, als nach H. Weyl's treffender Kennzeichnung „den Orgien eines Zweck gewordenen Formalismus" das Wort zu reden.

Der natürliche Kalkül der Differentialgeometrie ist die Tensorrechnung. Sie enthält die alte wohlvertraute Koordinatengeometrie, und die Einwände ihrer Kritiker richten sich implizit gegen diese mit, aber sie geht darüber hinaus. Dem geometrischen Charakter der zu leistenden Analyse angepaßt, erfüllt der Tensorkalkül die Formeln ihrer Herleitung und Darstellung nach auch dort noch mit geometrischem Inhalt, wo sich dieser der Fassung mit den Mitteln der Koordinatengeometrie entzieht.

Während sich die allgemeinen Riemannschen Räume ohne Tensorkalkül wohl überhaupt nicht fruchtbar behandeln lassen, wird er hier, von einem neueren englischen Buch abgesehen[1]), wohl zum erstenmal systematisch auch in der elementaren Flächentheorie verwendet. Die Vorteile liegen doch auf der Hand: Abkürzung aller Rechnungen, prägnante Formeln, deren geometrischer Inhalt, wie bereits erwähnt, ohne weiteres zu erkennen ist, die Möglichkeit, spezielle Parameter weitgehend vermeiden, gegebenenfalls aber doch einführen zu können usw. Im Zusammenhang damit erschien es geradezu selbstverständlich, auch die elementare Vektorrechnung einer Revision hinsichtlich ihrer formalen Seite zu unterziehen. Es ist in der Tat nicht einzusehen, warum die Methoden des allgemeinen Tensorkalküls nicht auch für den euklidischen Raum gut genug sein sollen — uns erscheinen sie besser als

1) J. E. Campbell, *A course of differential geometry*, Oxford 1926.

die gebräuchliche, weder notwendige noch besonders leistungsfähige Symbolik.[1])

Wer eine Gefahr oder eine Schwäche darin zu erblicken glaubt, daß ein Formalismus, indem er das Denken oft erspart, des Denkens entwöhnen könnte, dem sei entgegengehalten, daß die Stärke eines wohldurchdachten Formalismus gerade darin liegt, daß er scharf und sicher die Stelle aufweist, wo die mathematische Idee einzusetzen hat.

Bei der Korrektur haben uns Frau Jenny Lense und Lisl Duschek sowie die Herren G. Bergmann, L. Bieberbach, D. Blanuša, N. Hofreiter, H. Hornich, J. Lense, W. Reich und H. Schatz in liebenswürdigster Weise unterstützt; ihnen allen, ganz besonders aber den Herren Bieberbach und Lense für viele wertvolle kritische Bemerkungen und Anregungen, gebührt unser herzlichster Dank.

Wien, im Herbst 1929.

**A. Duschek. W. Mayer.**

Was den vorliegenden ersten Band unseres Lehrbuches von anderen Darstellungen unterscheidet, das ist, wie schon oben angedeutet und begründet, in erster Linie die konsequente Verwendung des Tensorkalküls. Wer etwa nur eine oberflächliche Kenntnis des Tensorkalküls hat und so auf den Gedanken kommt, seine Verwendung heiße hier soviel wie mit Kanonen auf Tauben schießen, der dürfte bei aufmerksamer Durchsicht des Buches wohl bald anderen Sinnes werden. Auf besondere Schwierigkeiten wird der Leser kaum stoßen, denn ich habe mich — auch was den sachlichen Gehalt betrifft — sehr bemüht, den Charakter eines einführenden Lehrbuches zu wahren und nichts zu bringen, zu dessen Begründung ich dem Leser die Mittel nicht hätte geben können. Vorausgesetzt ist die Kenntnis der Infinitesimalrechnung sowie der Grundbegriffe der analytischen Geometrie, Funktionentheorie und der Theorie der Differentialgleichungen.

Vorangestellt ist dem Buch ein einleitender Abschnitt, der die Grundgedanken von Felix Kleins Erlanger Programm und eine Einführung in die „symbolfreie"[2]) Vektorrechnung des euklidischen Raumes bringt. Der zweite Abschnitt enthält die Theorie der Raumkurven, mit dem dritten beginnt die Flächentheorie. Hier stehen die allgemeinen Probleme im Vordergrund der Darstellung,

---

1) Man vergleiche auch eine demnächst in den Jahresberichten der D. M. V. erscheinende Note *Über symbolfreie Vektorrechnung* von A. Duschek.

2) Ich finde trotz einiger Opposition gegen diesen Namen keinen besseren. Er scheint mir den Sinn der Sache insofern ganz gut zu charakterisieren, als dieser Formalismus im Gegensatz zum gebräuchlichen nicht mehr Symbolik enthält, als man sonst in der Mathematik anzutreffen gewohnt ist.

also die beiden Grundformen (Abschnitt III und IV), das Formenproblem (Abschnitt V) und die Geometrie auf der Fläche (Abschnitt III, V und VI). Was an spezielleren Dingen behandelt wird, hängt entweder irgendwie, als Beispiel oder Anwendung, mit den allgemeinen Theoremen zusammen oder es ist — wie die speziellen Flächen in Abschnitt VII — von solcher Wichtigkeit, daß es in einem Lehrbuch wie dieses, an das schließlich auch die Forderung nach einer gewissen Vollständigkeit zu stellen ist, nicht fehlen darf.

Man hat sich in der Differentialgeometrie vielfach daran gewöhnt, alle Funktionen von vornherein ausdrücklich oder stillschweigend als analytisch anzunehmen. Das ist zwar recht bequem, aber im Reellen im allgemeinen weder notwendig noch sonderlich zweckmäßig. Man denke da nur an gewisse Umkehrprobleme: In der Kurventheorie werden die Begriffe „Krümmung" und „Windung" für analytische Kurven erklärt, die Umkehrung, d. h. die Existenz und Unität einer Kurve gegebener Krümmung und Windung wird aber unter der bloßen Voraussetzung der Stetigkeit bewiesen, wodurch man zu Kurven kommt, die früher überhaupt nicht behandelt wurden. Ein anderes Beispiel ist der tiefliegende und dabei ganz einfach zu beweisende Satz, daß eine zweimal stetig differenzierbare reelle Minimalfläche notwendig analytisch ist, der bisher in keinem Lehrbuch der Differentialgeometrie zu finden war.

Aber auch sonst habe ich in diesem Buch die Zügel der Exaktheit straffer angezogen, als es in der Geometrie meist üblich ist; ein Symptom dafür mag sein, daß das ominöse Wort „benachbart" nirgends verwendet wird.

**A. Duschek.**

# Inhaltsverzeichnis.

## I. Einleitung.



## II. Die Kurven im Raum.



## III. Die erste Grundform einer Fläche.



## IV. Die zweite Grundform und die Krümmung einer Fläche.

## Zur Beachtung!

Die Formelverweise sind folgendermaßen zu verstehen (als Beispiel):

(III, 3, 15) heißt Formel (15) in Abschnitt III, § 3.

(3, 15) heißt Formel (15) in § 3 desselben Abschnittes, in dem der Verweis steht.

(15) heißt wie gewöhnlich Formel (15) desselben Paragraphen, in dem der Verweis steht.

# I. Einleitung.

## § 1. Orthogonale Transformationen.

Wenn man analytische Geometrie treiben, also die Eigenschaften geometrischer Gebilde rechnerisch erfassen will, so pflegt man sich eines Koordinatensystems zu bedienen, das ein allerdings nur methodisch wichtiges, sachlich aber durchaus unwesentliches Hilfsmittel ist. Die geometrischen Gebilde, die man zu untersuchen hat, stellen sich in einem bestimmten Koordinatensystem durch eine Reihe von Relationen zwischen den Koordinaten dar, die je nach der Allgemeinheit noch gewisse willkürliche Parameter enthalten können. Die Eigenschaften unserer Gebilde werden durch andere Relationen und Zahlwerte wiedergegeben, die von den Bestimmungsgrößen der Gebilde, z. B. auch von den erwähnten Parametern abhängen und die sich durch analytische Operationen aus den gegebenen Relationen herleiten lassen. Denken wir uns etwa ein ebenes Dreieck in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem durch die Gleichungen seiner Seiten gegeben. Die Koeffizienten in diesen Gleichungen sind die Bestimmungsgrößen der Seiten und damit des Dreiecks, sie können numerisch gegeben oder ganz oder teilweise allgemein (willkürliche Parameter) sein. Die Gleichung des umschriebenen Kreises ist dann eine Relation, Inhalt, Seitenlängen, Winkel usw. sind Zahlwerte der erwähnten Art, die von den Bestimmungsgrößen des Dreiecks abhängen. Die Koordinaten der Ecken sind für das Dreieck ganz nebensächlich, genau so wie etwa die Aussage: „Der Punkt $A$ liegt so und so viele Maßeinheiten nördlich vom Punkt $B$", die niemand als eine geometrische Aussage werten wird, sondern höchstens — wenn $A$ und $B$ etwa zwei Punkte der Erdoberfläche sind — als eine Aussage der Geographie. Ähnliches gilt von den Gleichungen der Seiten.

Bewegen wir unser Dreieck als Ganzes irgendwie in der Ebene, so dürfen sich Inhalt usw. nicht ändern. Der umschriebene Kreis macht die Bewegung mit, wodurch seine Gleichung eine andere wird, aber die Eigenschaft, auf die es ankommt, umschriebener Kreis des Dreiecks zu sein, bleibt erhalten. Ebenso ändern sich bei der Bewegung die Gleichungen der Seiten und die Koordinaten der Ecken in bestimmter Weise. Die Bewegung des Dreiecks wird vollständig beschrieben sein, wenn wir angeben, wie sich die Koordinaten eines beliebigen Punktes nach der Bewegung aus den Koordinaten des Punktes vor der Bewegung berechnen lassen.

Damit sind wir bei der Fragestellung angelangt, die wir im folgenden behandeln wollen, allerdings gleich etwas allgemeiner für den Fall des (dreidimensionalen) Raumes: Welches ist der analytische Ausdruck für eine Bewegung des Raumes, d. h. welcher Zusammenhang besteht zwischen den Koordinaten zweier durch eine Bewegung auseinander hervorgegangenen Punkte in bezug auf ein bestimmtes Koordinatensystem? Wir wollen uns dabei auf den Standpunkt stellen, daß wir vom Begriff der Bewegung bloß eine gewisse anschauliche Vorstellung haben, die wir Schritt für Schritt durch geeignete, eben dieser Vorstellung entnommene Forderungen präzisieren.

Wir bezeichnen mit $x_1$, $x_2$, $x_3$ die Koordinaten eines Punktes in einem rechtsorientierten[1]) rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem.[2]) Um unsere Formeln möglichst einfach und durchsichtig zu gestalten, benützen wir eine abgekürzte Schreibweise und setzen fest:

*Lateinische Indizes sind stets Repräsentanten der drei Zahlen* 1, 2, 3. *Kommt ein lateinischer Index in einem Ausdruck* zweimal *vor, so ist er Summationsindex einer Summe* $\sum\limits_1^3$, *d. h. es ist über diesen Index von* 1 *bis* 3 *zu summieren, ohne daß ein Summenzeichen eigens angeschrieben wird.* Ausnahmen von dieser Vorschrift werden fallweise ausdrücklich gekennzeichnet. Wir schreiben also im folgenden

$$x_i \text{ statt } x_1, x_2, x_3 \text{ oder statt } x_i \ (i = 1, 2, 3),$$

$$x_i = a_i \text{ statt } x_1 = a_1,\ x_2 = a_2,\ x_3 = a_3,$$

$$a_i x_i \text{ statt } a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \text{ oder statt } \sum_{i=1}^{3} a_i x_i,$$

$$x_i x_i \text{ statt } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \text{ oder statt } \sum_{i=1}^{3} x_i^2,$$

1) Die drei Achsen folgen aufeinander wie Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand. Oder: Die Drehung der positiven $x_1$-Achse in die positive $x_2$-Achse durch den kleineren Winkel, verbunden mit einer Verschiebung in der Richtung der positiven $x_3$-Achse, gibt die Bewegung einer rechtsgängigen Schraube (Rechtsschraube).

2) Die Einführung von Koordinaten im Raum ist stets eine umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung der Punkte des Raumes auf den dreidimensionalen Zahlraum, d. h. auf die Zahlentripel $x_1$, $x_2$, $x_3$. Im Fall der rechtwinkligen kartesischen Koordinaten kann man sich diese Abbildung dadurch hergestellt denken, daß man die Raumpunkte senkrecht auf drei beliebig gewählte, zu je zweien aufeinander senkrechte Ebenen projiziert; die Koordinaten eines Punktes sind dann die mit einer beliebigen Maßeinheit gemessenen Abstände des Punktes von seinen drei Bildern in bestimmter Reihenfolge. Die Begriffe „senkrecht" und „Ebene" entnehmen wir dabei der Elementargeometrie. — Man kann natürlich die Raumpunkte mit den Zahlentripeln geradezu identifizieren (z.B. Study, *Die realistische Weltansicht und die Lehre vom Raum*, Braunschweig 1914), doch wollen wir hier aus bestimmten Gründen an der Vorstellung einer Abbildung von Punkt- und Zahlenraum festhalten. Vgl. dazu auch III, § 1.

$$a_{ik} x_i y_k \text{ statt } a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{13} x_1 y_3 + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2 + a_{23} x_2 y_3 + a_{31} x_3 y_1 + a_{32} x_3 y_2 + a_{33} x_3 y_3$$

usw. Zu bemerken ist, daß Summationsindizes ganz beliebig abgeändert werden können[1]), d. h. es ist $a_i x_i = a_j x_j = a_l x_l$ usw. Ferner ist zu beachten, daß man z. B. aus $a_i x_i = b_i x_i$ nicht etwa $a_i = b_i$ folgern darf; es stehen ja beiderseits Summen, so daß ein Kürzen durch $x_i$ unzulässig ist!

Es seien also $x_i$ die Koordinaten des Punktes in seiner ursprünglichen Lage, $\bar{x}_i$ die Koordinaten des Punktes nach der Bewegung; zwischen den $\bar{x}_i$ und $x_i$ müssen dann jedenfalls Relationen von der Form

$$x_i = f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \tag{1}$$

und auch umgekehrt

$$\bar{x}_i = g_i(x_1, x_2, x_3) \tag{2}$$

bestehen. Die Funktionen $f_i$ und $g_i$ müssen wir dabei als *eindeutige und analytische Funktionen* annehmen.[2]) Sie genügen den sechs Identitäten

$$x_i = f_i(g_1, g_2, g_3), \quad \bar{x}_i = g_i(f_1, f_2, f_3); \tag{3}$$

aus den drei ersten folgt durch Differentiation (Kettenregel)

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j}\frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_k} = \delta_{ik}, \tag{4}$$

wobei $\delta_{ik} = 1$ oder $= 0$ ist, je nachdem $i = k$ oder $i \neq k$ ist. Für die beiden Funktionaldeterminaten von (1) und (2) gilt dann nach dem Multiplikationssatz für Determinanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \bar{x}_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \bar{x}_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \bar{x}_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \bar{x}_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \bar{x}_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \bar{x}_3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 1. \tag{5}$$

1) So wie ein bestimmtes Integral nicht von der Integrationsveränderlichen abhängt!

2) Sei z. B. eine Fläche $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ gegeben, wo $F$ eine $\varrho$ mal stetig differenzierbare Funktion ist. Nach der Bewegung hat ihre Gleichung die Form $G(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = 0$. Nun müssen wir aber die Eigenschaft einer Funktion, $\varrho$ mal stetig differenzierbar zu sein, als eine geometrische, d. h. als eine Eigenschaft ansehen, die durch eine Bewegung nicht zerstört wird, da eine geometrische Eigenschaft im allgemeinen durch eine Relation zwischen den Koordinaten und ihren Ableitungen gegeben ist. Die Transformationsgleichungen (1) und (2) müssen also so beschaffen sein, daß auch die Funktion $G$ nach allen Argumenten $\varrho$ mal stetig differenzierbar ist. Das wird aber für beliebiges $\varrho \geqq 0$ dann und nur dann der Fall sein, wenn die $f_i$ (und ebenso die $g_i$) analytische Funktionen sind, die ja stetige Ableitungen jeder Ordnung besitzen.

Es kann somit keine der beiden Funktionaldeterminanten verschwinden, da sonst die andere in dem betreffenden Punkt unendlich werden müßte in Widerspruch dazu, daß beide als stetige Funktionen stetiger Funktionen selbst stetig sind. Also ist stets

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \overline{x}_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \overline{x}_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \overline{x}_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \overline{x}_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \overline{x}_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \overline{x}_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \overline{x}_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \overline{x}_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \overline{x}_3} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{6}$$

Man nennt bekanntlich (1) eine *Punkttransformation* oder kurz *Transformation*; (2) ist insbesondere *die zu* (1) *inverse Transformation.*

Wie schon gesagt, wollen wir nun durch geeignete Forderungen unter diesen allgemeinsten umkehrbar eindeutigen analytischen Transformationen die Bewegungen charakterisieren.[1])

*A. Die Transformation* (1) *muß Ebenen wieder in Ebenen überführen.* Sei

$$a_i x_i = k \tag{7}$$

eine Ebene. Nach Ausführung der Transformation (1) hat ihre Gleichung die Form

$$a_i f_i(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) = k, \tag{8}$$

was bei beliebigen Werten der Koeffizienten $a_i$ dann und nur dann die Gleichung einer Ebene, also *linear* in den $\overline{x}_i$ ist, wenn die Transformation (1) die Gestalt

$$x_i = \frac{c_{ik}\overline{x}_k + c_{i4}}{c_{4k}\overline{x}_k + c_{44}} \tag{9}$$

hat, d. h. wenn die drei Funktionen $f_i$ linear gebrochene Funktionen mit gleichem Nenner sind.[2]) Dabei sind aber alle Punkte der Ebene

$$c_{4k}\overline{x}_k + c_{44} = 0 \tag{10}$$

1) Wir machen ausdrücklich aufmerksam, daß allein durch die Forderungen $C$ und $D$ die Bewegungen unter den Transformationen (1), (2) charakterisiert sind (vgl. Band 2, IV, § 2), daß also die Forderungen $A$ und $B$ überflüssig sind. Daß wir sie hier doch einführen, hat seinen Grund darin, daß sie wichtige Eigenschaften der Bewegungen zum Ausdruck bringen und uns außerdem einige wichtige Begriffe, nämlich die projektiven und affinen Transformationen in ihrem unmittelbaren sachlichen Zusammenhang liefern.

2) An Stelle von (8) kann man allgemeiner

$$\psi(a_i f_i - k) = 0$$

schreiben, solange $\psi = \psi(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3 \neq 0$ ist. Setzt man zur Abkürzung

$$\psi f_i = \varphi_i,$$

so folgt

$$a_i \varphi_i - k\psi = 0.$$

auszuschließen, da in diesen Punkten die Funktionen $f_i$ nicht stetig, also schon gar nicht analytisch sind. Das gibt sofort die weitere Bedingung $c_{41} = c_{42} = c_{43} = 0$, $c_{44} \neq 0$, die wir in der Forderung $B$ geometrisch formulieren werden.

Wir betrachten zunächst die allgemeinen *projektiven Transformationen* (9). Wie man mittels

$$\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j} = \frac{1}{N}(c_{ij} - c_{4j} x_i),$$

wo

$$N = c_{4k}\bar{x}_k + c_{44}$$

gesetzt ist, leicht zeigt, gilt

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \bar{x}_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \bar{x}_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \bar{x}_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \bar{x}_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \bar{x}_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \bar{x}_3} \end{vmatrix} = \frac{1}{N^4} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix};$$

wegen (6) muß also

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix} \neq 0$$

sein. Dann lassen sich (9) eindeutig nach den $\bar{x}_i$ auflösen; man erhält für die inverse Transformation wieder eine linear gebrochene Transformation vom selben Typus wie (9). Auszuschließen sind dabei wieder alle Punkte der (10) entsprechenden Ebene.

Die Gleichung (10) hat zunächst nur in den Koordinaten $\bar{x}_i$ einen Sinn und gibt hier eine wohlbestimmte Ebene, während nach (9) mindestens eine Koordinate $x_i$ jedes entsprechenden Punktes unendlich wird.[1]) Man spricht bekanntlich von der *uneigentlichen* oder *unendlichfernen Ebene,* die der (wenigstens im allgemeinen) eigentlichen, d. h. im Endlichen gelegenen Ebene (10)

---

Die linke Seite ist linear in den $\bar{x}_i$, wenn für die zweiten Ableitungen

$$a_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l} - k \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l} = 0$$

gilt. Soll das für alle Ebenen, d. h. für alle $a_i$, $k$ der Fall sein, so muß

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l} = 0,$$

also

$$\varphi_i = c_{ik}\bar{x}_k + c_{i4}, \quad \psi = c_{4k}\bar{x}_k + c_{44}$$

sein, was auf (9) führt. Die Punkte von (10) sind eben wegen der Bedingung $\psi \neq 0$ auszuschließen.

1) Wird nämlich zugleich einer der Zähler in (9) Null, so kann das betreffende $x_i$ sehr wohl endlich sein. Wegen (11) können aber nicht zugleich mit dem Nenner auch alle drei Zähler in (9) verschwinden.

vermöge der Transformation (9) zugeordnet ist. Damit kommen wir zur nächsten Forderung:

*B. Eine Bewegung führt eine eigentliche Ebene stets wieder in eine eigentliche Ebene über.* Man kann dafür auch sagen: Die uneigentliche Ebene wird durch eine Bewegung in sich übergeführt. Dann muß es offenbar ausgeschlossen sein, der Gleichung (10) durch *endliche* Werte der $\bar{x}_i$ zu genügen, d. h. es muß, wie oben schon bemerkt, $c_{41} = c_{42} = c_{43} = 0$, $c_{44} \neq 0$ sein.[1]) Setzen wir $\frac{c_{ik}}{c_{44}} = a_{ik}$ und $\frac{c_{i4}}{c_{44}} = b_i$, so wird aus (9)

$$x_i = a_{ik}\bar{x}_k + b_i, \tag{12}$$

d. h. man erhält eine sogenannte *affine Transformation* mit der charakteristischen Eigenschaft, daß parallele Ebenen wieder in parallele Ebenen übergeführt werden.

*C. Der Abstand zweier beliebiger Punkte bleibt bei einer Bewegung ungeändert.*[2]) Dabei ist der Abstand zweier Punkte $x_i$ und $y_i$ durch

$$D(x, y) = \left|\sqrt{(x_i - y_i)(x_i - y_i)}\right|$$

gegeben. Es genügt zu verlangen, daß das Quadrat dieses Abstandes ungeändert bleibt.

Wir zerlegen die Transformation (12) in zwei einfachere

$$x_i = x_i' + b_i \tag{13}$$

und

$$x_i' = a_{ik}\bar{x}_k. \tag{14}$$

Die drei Gleichungen (13) sind eine *Parallelverschiebung* des Raumes; die Ebenen $x_i = 0$ gehen über in die Ebenen $x_i' + b_i = 0$, die zu den Koordinatenebenen $x_i = 0$ parallel und ebenso orientiert sind.[3])

---

1) Noch deutlicher wird das, wenn man homogene Koordinaten einführt, indem man $x_i = \frac{z_i}{z_4}$, $\bar{x}_k = \frac{\bar{z}_k}{\bar{z}_4}$ setzt. Die Gleichungen (9) gehen dann über in

$$\sigma z_i = c_{ik}\bar{z}_k \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

wo $\sigma \neq 0$ ein Proportionalitätsfaktor ist (rechts hat man wie angegeben über $k$ von 1 bis 4 zu summieren!). Die uneigentlichen Ebenen sind $z_4 = 0$ und $\bar{z}_4 = 0$; sie entsprechen einander offenbar dann und nur dann, wenn die oben angegebenen Bedingungen erfüllt sind.

2) Vgl. die Anmerkung 1) S. 4.

3) Eine Ebene ist *orientiert*, sobald auf der Normalen ein bestimmter Durchlaufungssinn oder in der Ebene ein bestimmter Drehungssinn als positiv ausgezeichnet ist; dabei hat der Drehungssinn zusammen mit dem Durchlaufungssinn der Normalen jenen Schraubungssinn zu ergeben, den man im Raum als positiv ausgezeichnet hat (in unserem Fall den der Rechtsschraube). Die Koordinatenebenen und alle dazu parallelen Ebenen sind von vornherein durch den positiven Sinn der jeweils senkrechten Koordinatenachse orientiert.

Die affine Transformation (14) läßt den Ursprung (0, 0, 0) fest *(zentroaffine Transformation)*. Wenn diese Transformation eine Bewegung sein soll, so muß sie also eine *Drehung* um den Ursprung sein und es muß das Quadrat des Abstandes eines beliebigen Punktes $x_i'$ vom Ursprung, nämlich

$$[D(x', 0)]^2 = x_i' x_i'$$

ungeändert bleiben, oder, wie man ebensogut sagen kann, es müssen die Kugeln mit dem Mittelpunkt im Ursprung in sich übergeführt werden. Durch Einsetzen erhält man die Bedingung

$$x_j' x_j' = a_{ji}\bar{x}_i a_{jk}\bar{x}_k = a_{ji} a_{jk} \bar{x}_i \bar{x}_k = \bar{x}_i \bar{x}_i \tag{15}$$

und daraus[1])

$$a_{ji} a_{jk} = \delta_{ik}, \tag{16}$$

wo die $\delta_{ik}$ die oben definierten Größen (1 oder 0, je nachdem $i = k$ oder $i \neq k$) sind. Ausführlich geschrieben lauten die neun Gleichungen (16), die sich wegen $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ auf sechs verschiedene reduzieren, folgendermaßen:

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1, & a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1, & a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} = 0, \\ a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1, & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0. \end{array}\right. \tag{16'}$$

In Worten:

Die Summe der Quadrate der Elemente einer Spalte der Matrix

$$\| a_{ik} \| = \left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right\| \tag{17}$$

hat stets den Wert 1, während die Summe der Produkte entsprechender Elemente aus zwei verschiedenen Spalten verschwindet. Wir werden in § 2 sehen, daß dann notwendig die entsprechenden Bedingungen für die Zeilen gelten.

Die Transformation (14) und die Matrix (17) heißen *orthogonal*, sobald die Bedingungen (16) erfüllt sind. Man zeigt leicht, daß auch umgekehrt alle orthogonalen Transformationen den Abstand zweier Punkte ungeändert lassen, so daß die Bedingungen (16) auch hinreichend sind.

---

1) Die Bedingung steckt in der letzten Gleichung, die ausführlich geschrieben folgendermaßen aussieht:

$$(a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 + a_{13}\bar{x}_3)^2 + (a_{21}\bar{x}_1 + a_{22}\bar{x}_2 + a_{23}\bar{x}_3)^2 + (a_{31}\bar{x}_1 + a_{32}\bar{x}_2 + a_{33}\bar{x}_3)^2 = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2.$$

Wir sind damit dem anschaulichen Begriff der Bewegung schon sehr nahe gekommen. Von den Parallelverschiebungen können wir überhaupt absehen; ob wir die Transformation (12) als Bewegung ansprechen können, hängt also nur mehr von der Transformation (14) ab. Wir schreiben statt $x_i'$ wieder $x_i$ und betrachten die orthogonale Transformation

$$(18) \qquad x_i = a_{ik}\bar{x}_k.$$

Es seien $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ die drei Punkte, die *nach* Ausübung der Transformation (18) die Koordinaten (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) haben; wir schreiben dafür kurz ${}_{(i)}\bar{x}_k = \delta_{ik}$, wobei sich der vordere eingeklammerte Index auf den Punkt bezieht. Die Koordinaten der entsprechenden Punkte $P_1, P_2, P_3$ vor Ausübung der Transformation (18) sind dann ${}_{(j)}x_i = a_{ik}\,{}_{(j)}\bar{x}_k = a_{ik}\delta_{jk} = a_{ij}$, d. h. der Punkt $P_j$ hat die Koordinaten $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}$. Da er außerdem vom Ursprung denselben Abstand hat wie der Punkt $\bar{P}_j$, nämlich 1, so kann man, auch in Übereinstimmung mit (16), die Elemente der $j$ten Spalte von (17) als Richtungskosinus jener Geraden durch den Ursprung $O$ und den Punkt $P_j$ deuten, die bei der Transformation (18) in die $x_j$-Achse übergeht. Diese drei Geraden ($j = 1, 2, 3$) stehen wegen der ersten Hälfte der Gleichungen (16') aufeinander senkrecht. Wir werden also (18) mit vollem Recht als Drehung bezeichnen können, wenn das rechtwinklige Dreikant $O P_j$ dieselbe Orientierung besitzt wie das entsprechende Dreikant $O\bar{P}_j$, das mit dem Koordinatendreikant identisch ist. Damit kommen wir zu unserer letzten Forderung:

*D. Bei einer Bewegung bleibt die Orientierung rechtwinkliger Dreikante erhalten.* In der analytischen Geometrie ordnet man bekanntlich dem Volumen eines Tetraeders mit den Ecken $Q, Q_1, Q_2, Q_3$ ein bestimmtes Vorzeichen zu, das von der Orientierung des Tetraeders abhängt: Sind die drei Geraden $\overrightarrow{QQ_1}, \overrightarrow{QQ_2}, \overrightarrow{QQ_3}$ in dem durch die Pfeile angedeuteten Sinn ebenso orientiert wie die Koordinatenachsen, so ist das Volumen positiv, sonst negativ. Wir betrachten insbesondere die beiden entsprechenden Tetraeder $O P_1 P_2 P_3$ und $O\bar{P}_1\bar{P}_2\bar{P}_3$, deren Volumina durch den sechsten Teil der dreireihigen Koordinatendeterminanten der von $O$ verschiedenen Ecken gegeben sind. Somit ist das Volumen von $O\bar{P}_1\bar{P}_2\bar{P}_3$ gleich $\frac{1}{6}$, während das Volumen von $O P_1 P_2 P_3$ durch die Koeffizientendeterminante $|a_{ik}|$ von (18) gegeben ist. Berechnet man in bekannter Weise ihr Quadrat durch Kombination von Spalten mit Spalten, so erhält man wegen (16) sofort

$$|a_{ik}|^2 = |\delta_{ik}| = 1,$$

so daß also $|a_{ik}|$ selbst entweder gleich 1 oder gleich $-1$ ist.

Die Forderung $D$ ist also erfüllt, wenn wir nur orthogonale Transformationen mit der Determinante $+1$, sogenannte *eigentlich orthogonale Transformationen*,

zulassen, dagegen die *uneigentlich orthogonalen Transformationen* mit der Determinante $-1$ ausschließen. Es gilt also[1]):

*Die Bewegungen im Raum sind identisch mit den Transformationen*

$$x_i = a_{ik}\bar{x}_k + b_i$$

*für die* $a_{ji}a_{jk} = \delta_{ik}$ *und* $|a_{ik}| = +1$ *ist. Sind alle* $b_i = 0$, *so handelt es sich um eine Drehung um den Ursprung (eigentlich orthogonale Transformation).*

Was bedeuten nun die uneigentlich orthogonalen Transformationen? Wir sehen wieder von den Parallelverschiebungen ab und betrachten eine spezielle solche Transformation

$$x_1 = \bar{x}_1, \quad x_2 = \bar{x}_2, \quad x_3 = -\bar{x}_3. \tag{19}$$

Sie stellt offenbar eine Spiegelung an der Koordinatenebene $x_3 = 0$ dar. Es läßt sich aber jede uneigentliche Transformation zurückführen auf die Spiegelung (19) und auf eine eigentlich orthogonale Transformation. Ist nämlich (18), d. h. ausführlicher

$$x_i = a_{i1}\bar{x}_1 + a_{i2}\bar{x}_2 + a_{i3}\bar{x}_3 \tag{20}$$

eine uneigentlich orthogonale Transformation, so gibt die eigentlich orthogonale Transformation

$$x_i = a_{i1}\bar{\bar{x}}_1 + a_{i2}\bar{\bar{x}}_2 - a_{i3}\bar{\bar{x}}_3$$

zusammen mit der Spiegelung

$$\bar{\bar{x}}_1 = \bar{x}_1, \quad \bar{\bar{x}}_2 = \bar{x}_2, \quad \bar{\bar{x}}_3 = -\bar{x}_3$$

gerade die Transformation (20). Die Transformationen (12), (16) mit $|a_{ik}| = -1$ werden als *Umlegungen* bezeichnet. Die Spiegelung (19) an der $x_1 x_2$-Ebene ist eine spezielle Umlegung.

## § 2. Transformationsgruppen. Das Erlanger Programm.

Unsere Überlegungen von § 1 ermöglichen es, eines der wichtigsten Resultate zu erörtern, welches die geometrische Forschung in den letzten Jahrzehnten gezeitigt hat. Es handelt sich um die engen Beziehungen zwischen Geometrie und Gruppentheorie, die Felix Klein bemerkt und in seinem berühmten „Erlanger Programm" im Jahre 1872 veröffentlicht hat.[2])

1) Daß die orthogonalen Transformationen auch Winkel ungeändert lassen, ist leicht einzusehen, da jedes Dreieck in ein Dreieck übergeführt wird, dessen Seiten dieselben Längen haben wie die entsprechenden Seiten des ursprünglichen Dreieckes, so daß zwei entsprechende Dreiecke kongruent sind und somit auch gleiche Winkel haben.

2) Unter dem Titel: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.* Wiederabgedruckt in Math. Ann. 43 (1893) und in Kleins Gesammelten Abhandlungen, Bd. 1, S. 460 (Berlin 1921).

Wir definieren zunächst: *Irgendeine Menge von Transformationen*

$$x_i = x_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \tag{1}$$

*ist eine Transformationsgruppe, wenn*

*erstens die identische Transformation* $x_i = \bar{x}_i$ *in der Menge enthalten ist,*

*zweitens mit jeder Transformation der Menge auch ihre inverse Transformation zur Menge gehört und wenn*

*drittens die Ausübung von zwei Transformationen der Menge hintereinander stets wieder eine Transformation der Menge liefert,* die dann als *Produkt* der beiden ersten Transformationen bezeichnet wird.

Hängt die allgemeine Transformation (1) einer Gruppe von $r$ unabhängigen Veränderlichen oder Parametern $a_1, a_2, \ldots, a_r$ so ab, daß eine und nur eine Transformation der Gruppe festgelegt ist, sobald man den Parametern bestimmte Werte erteilt, und daß man derart auch alle Transformationen der Gruppe erhält, so spricht man von einer *$r$gliedrigen Transformationsgruppe.*[1])

Eine (echte) Teilmenge von Transformationen einer Gruppe heißt (echte) *Untergruppe,* wenn die Transformationen der Teilmenge bereits für sich eine Gruppe sind, d. h. den obigen drei Bedingungen genügen.

Die Menge aller projektiven Transformationen (1, 9) bildet in diesem Sinn eine 15gliedrige Transformationsgruppe, die wir kurz die *projektive Gruppe* nennen. Denn offenbar ist (für $c_{11} = c_{22} = c_{33} = c_{44} \neq 0$, alle übrigen $c_{ik} = 0$) die identische Transformation vorhanden, ferner läßt sich (1, 9) wegen (1, 11) nach den $\bar{x}_i$ auflösen, so daß zu jeder Transformation die inverse existiert; und schließlich ist unmittelbar einzusehen, daß zwei linear gebrochene Transformationen, hintereinander ausgeführt, wieder eine linear gebrochene Transformation ergeben. Daß es sich nur um eine 15gliedrige, nicht um eine 16gliedrige Gruppe handelt, folgt daraus, daß nicht die 16 Koeffizienten $c_{ik}$ ($i, k = 1, 2, 3, 4$) selbst, sondern nur ihre Verhältnisse wesentlich sind.[2])

Man überlegt nun leicht, daß die affinen Transformationen (1, 12) eine 12gliedrige Gruppe bilden, die eine Untergruppe der projektiven Gruppe ist. Sie wird als *affine Gruppe* bezeichnet. Die Parallelverschiebungen (1, 13) sind eine dreigliedrige, die sogenannten *zentroaffinen Transformationen* (1, 14) (selbstredend ohne die Bedingungen (1, 16)) eine neungliedrige Untergruppe der affinen Gruppe.

---

1) Dabei müssen wir allerdings noch annehmen, daß die Parameter alle *wesentlich* sind, d. h. daß man die allgemeine Transformation der Gruppe nicht schon als Funktion von weniger als $r$ Parametern darstellen kann.

2) Da in (1, 9) jedenfalls nicht alle Koeffizienten des Nenners verschwinden, kann man durch einen derselben kürzen, ohne die Transformation zu ändern.

Wir kommen nun zu den Bewegungen. Es seien

$$x_i = a_{ik}\bar{x}_k + b_i, \quad \bar{x}_k = \bar{a}_{kl}\tilde{x}_l + \bar{b}_k$$

mit $\qquad a_{ji}a_{jk} = \bar{a}_{ji}\bar{a}_{jk} = \delta_{ik}, \quad |a_{ik}| = |\bar{a}_{ik}| = +1$

zwei Bewegungen. Führt man sie in der durch die Schreibweise angedeuteten Reihenfolge hintereinander aus, so wird

$$x_i = a_{ik}\bar{a}_{kl}\tilde{x}_l + a_{ik}\bar{b}_k + b_i;$$

setzt man $\qquad a_{ik}\bar{a}_{kl} = \tilde{a}_{il}, \quad a_{ik}\bar{b}_k + b_i = \tilde{b}_i$

so wird $\qquad x_i = \tilde{a}_{il}\tilde{x}_l + \tilde{b}_i.$

Wir haben zu zeigen, daß die $\tilde{a}_{il}$ erstens den Orthogonalitätsbedingungen $\tilde{a}_{ji}\tilde{a}_{jk} = \delta_{ik}$ genügen und daß zweitens ihre Determinante den Wert $+1$ hat. Letzteres ist unmittelbar zu bestätigen, da offenbar

$$|\tilde{a}_{ik}| = |a_{ik}| \cdot |\bar{a}_{ik}|$$

ist. Andrerseits wird[1])

$$\tilde{a}_{ji}\tilde{a}_{jk} = a_{jh}\bar{a}_{hi}a_{jl}\bar{a}_{lk} = a_{jh}a_{jl}\bar{a}_{hi}\bar{a}_{lk} = \delta_{hl}\bar{a}_{hi}\bar{a}_{lk} = \bar{a}_{hi}\bar{a}_{hk} = \delta_{ik},$$

w. z. b. w.

Es sei ferner $A_{ik}$ das algebraische Komplement von $a_{ik}$ in der Matrix $\| a_{ik} \|$, so daß

(2) $$a_{ik}A_{il} = a_{ki}A_{li} = \delta_{kl}$$

ist. Um die inverse Transformation der Bewegung

$$x_i = a_{ik}\bar{x}_k + b_i \quad (a_{ji}a_{jk} = \delta_{ik}, \ |a_{ik}| = +1)$$

zu finden, multiplizieren wir beiderseits mit $A_{il}$, summieren über $i$ und erhalten

$$x_iA_{il} = a_{ik}A_{il}\bar{x}_k + b_iA_{il} = \delta_{kl}\bar{x}_k + b_iA_{il} = \bar{x}_l - B_l,$$

wo $B_l = -b_iA_{il}$ ist, oder

(3) $$\bar{x}_i = A_{ki}x_k + B_i.$$

Multiplizieren wir die Relation $a_{ji}a_{jk} = \delta_{ik}$ beiderseits mit $A_{hk}$ und summieren über $k$, so folgt

$$a_{ji}a_{jk}A_{hk} = a_{ji}\delta_{jh} = a_{hi} = \delta_{ik}A_{hk} = A_{hi},$$

also

(4) $$A_{ik} = a_{ik},$$

---

1) Man beachte, daß es ganz gleichgiltig ist, wie Summationsindizes bezeichnet werden; $a_{jh}\bar{a}_{hi}$ ist genau dasselbe wie z. B. $a_{jk}\bar{a}_{ki}$.

d. h. *die algebraischen Komplemente der Elemente einer eigentlich orthogonalen Matrix stimmen mit den Elementen selbst überein.* An Stelle von (3) können wir also schreiben

$$\bar{x}_i = a_{ki} x_k + B_i; \tag{5}$$

diese Transformation unterscheidet sich von der ursprünglichen nur durch die geänderte Stellung der Indizes der Koeffizienten (es sind Zeilen und Spalten der Transformationsmatrix vertauscht) und durch die Translationsglieder $B_i$. Da der Wert einer Determinante durch Vertauschen von Zeilen und Spalten nicht geändert wird, haben wir nur noch nachzuweisen, daß die Orthogonalitätsrelationen bestehen, die hier

$$a_{ij} a_{kj} = \delta_{ik} \tag{6}$$

lauten. In der Tat ist wegen (4) und (2)

$$a_{ij} a_{kj} = A_{ij} a_{kj} = \delta_{ik}.$$

Damit ist gezeigt, daß auch *die Bewegungen eine Gruppe bilden.* Sie ist sechsgliedrig und wird als *Bewegungsgruppe* bezeichnet. Die Drehungen (alle $b_i = 0$) bilden eine dreigliedrige Untergruppe (Drehungsgruppe). Selbstverständlich ist auch die Bewegungsgruppe eine Untergruppe der affinen und der projektiven Gruppe.

Bei uneigentlich orthogonalen Transformationen treten an Stelle von (2) und (4) die Gleichungen

$$a_{ik} A_{il} = a_{ki} A_{li} = -\delta_{kl} \tag{7}$$

und

$$A_{ik} = -a_{ik}; \tag{8}$$

sie bilden für sich keine Gruppe, da zwei uneigentlich orthogonale Transformationen hintereinander ausgeführt eine eigentlich orthogonale Transformation geben, wohl aber zusammen mit den letzteren. Wir bezeichnen diese ebenfalls sechsgliedrige Gruppe als *erweiterte Bewegungsgruppe* bzw., wenn alle $b_i = 0$ sind, als erweiterte Drehungsgruppe.

In der Reihenfolge: Projektive Gruppe — Affine Gruppe — Bewegungsgruppe — Drehungsgruppe ist also jede Gruppe eine Untergruppe aller vorhergehenden. Die Parallelverschiebungen sind ebenfalls eine Untergruppe der Bewegungsgruppe.

Es sei nun irgendeine Transformationsgruppe $\mathfrak{G}$ vorgelegt. *Man nennt dann jede Größe $I$ eine Invariante von $\mathfrak{G}$ (oder genauer eine Invariante gegenüber allen Transformationen von $\mathfrak{G}$), wenn für die Größe $\bar{I}$, die sich aus $I$ durch Ausführung einer beliebigen Transformation ergibt, eine Relation von der Form*

$$\bar{I} = \Phi \cdot I \tag{9}$$

*besteht, wo $\Phi$ allein von der Transformation, insbesondere von den die Transformation bestimmenden Parametern abhängt.*

Ist $\Phi = 1$, so spricht man von einer *absoluten*, sonst von einer *relativen Invariante.*

Was wir zu Beginn von § 1 speziell für die metrische (genauer: euklidische) Geometrie angedeutet haben, können wir jetzt ganz allgemein und präzise formulieren:

*Jede Geometrie, sei es nun projektive, affine oder metrische Geometrie, ist identisch mit der Invariantentheorie einer bestimmten Transformationsgruppe.* Ebenso gehört auch umgekehrt zu jeder vorgegebenen Transformationsgruppe eine bestimmte Geometrie. Es wird sich also jede geometrische Eigenschaft eines Gebildes in einer Invariante einer bestimmten Gruppe widerspiegeln und umgekehrt jede Invariante einer Gruppe eine geometrische Bedeutung haben.

Wir werden im folgenden eine andere Deutung der Gleichungssysteme (1), (2) bevorzugen, indem wir die $x_i$ und $\bar{x}_i$ nicht wie bisher als Koordinaten zweier Punkte bezüglich eines Koordinatensystems, sondern als Koordinaten *eines* Punktes bezüglich *zweier*, im allgemeinen verschiedener Koordinatensysteme ansehen. Man spricht dann in naheliegender Weise statt von einer Punkttransformation von einer *Koordinatentransformation.* Ein wesentlicher Unterschied zwischen diesen beiden Auffassungen besteht aber nicht. Offenbar läßt sich z. B. eine Bewegung des Raumes vollständig beschreiben durch eine bestimmte Bewegung des Koordinatensystems, und die Größen, die bei einer Bewegung eines geometrischen Gebildes ungeändert bleiben, also die Invarianten der Bewegungsgruppe, bleiben auch ungeändert, wenn wir an Stelle der ursprünglichen Koordinaten andere einführen, die aus den ersteren durch eine eigentlich orthogonale Koordinatentransformation entstanden sind und umgekehrt.[1]) Die Einteilung der von uns bisher betrachteten Transformationen in Gruppen und damit auch die Klassifikation der verschiedenen Geometrien ist von der Deutung der Transformationen durchaus unabhängig.

Man kann nun die Invarianten einer Gruppe nach Art ihrer Bildung aus den Bestimmungsstücken des gegebenen Gebildes in zwei Klassen teilen: in *algebraische* und in *Differential-* oder *Integralinvarianten.* Wie der Name andeutet, ergeben sich die ersteren durch algebraische, die letzteren durch

1) Dem numerischen Wert nach bleiben geometrische Größen auch bei einer ganz beliebigen Koordinatentransformation ungeändert, aber nicht ihrem formalen Aussehen nach. Der Radius einer Kugel ist derselbe, ob wir sie auf rechtwinklige kartesische oder z. B. auf Polarkoordinaten beziehen, aber ihre Gleichung nimmt in den letzteren eine ganz andere Gestalt an. Das „unverändert bleiben" des Textes bezieht sich also sowohl auf den numerischen Wert als auch auf die formale Gestalt.

analytische (Grenz-) Operationen aus den gegebenen Bestimmungsstücken. So sind z. B. die Achsenlängen einer Ellipse

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

$$|a_{ik}| \neq 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0,$$

algebraische Bewegungsinvarianten, ihre Krümmung

$$\varkappa = \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$$

ist eine Differentialinvariante, ihre Bogenlänge

$$s = \int \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

eine Integralinvariante. Demgemäß zerfällt die analytische Geometrie in algebraische und Differentialgeometrie. Während die erstere aber, wie es in der Natur der Sache liegt, vorwiegend algebraische Gebilde untersucht, erstreckt sich die letztere auf ein viel weiteres Gebiet; der obige Ausdruck für die Krümmung läßt sich auf jede Kurve $y = y(x)$ anwenden, wo $y(x)$ eine zweimal differenzierbare Funktion ist. Ein weiteres charakteristisches Merkmal ist zu erwähnen: Die algebraische Geometrie untersucht das gegebene Gebilde in seiner ganzen Ausdehnung, sie ist eine „*Geometrie im großen*"; die Differentialgeometrie untersucht dagegen in der Regel nur solche Eigenschaften, die schon einem beliebig kleinen Teil des Gebildes zukommen. Man kann offenbar von der Krümmung der Kurve $y = y(x)$ in einem Punkt $P$ sprechen, wenn die Funktion $y(x)$ nur in einer kleinen Umgebung von $P$ definiert und zweimal differenzierbar ist. Die Differentialgeometrie ist also im wesentlichen eine „*Geometrie im kleinen*". Im wesentlichen, denn es gibt Fragestellungen der Geometrie im großen, die mit differentialgeometrischen Methoden gelöst werden.[1]) Wir werden uns nur ganz ausnahmsweise mit solchen Fragen beschäftigen.

Zum Schlusse noch einige Bemerkungen über die Geometrie im komplexen Gebiet! Unsere bisherigen Überlegungen gelten ganz unverändert auch dann, wenn wir alle vorkommenden Größen ausdrücklich als komplex, d. h. als reell *oder* imaginär voraussetzen.[2]) Der Raum, dessen Punkte umkehrbar eindeutig den Tripeln komplexer Zahlen $x_i = \xi_i + i\eta_i$ zugeordnet sind und den wir den *dreidimensionalen komplexen Raum* nennen wollen, ist identisch mit einem

---

1) Zahlreiche derartige, nach Stellung und Lösung sehr elegante und zum Teil recht schwierige Probleme behandelt W. Blaschke in seinen „*Vorlesungen über Differentialgeometrie*" (Berlin 1921/28), insbesondere im ersten Band.

2) Die *komplexe* Zahl $a + ib$ ist *reell*, wenn $b = 0$, *imaginär*, wenn $b \neq 0$, und *rein imaginär*, wenn $a = 0$, $b \neq 0$ ist.

*sechsdimensionalen reellen Raum* $R_6$, in dem $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3$, die Koordinaten eines Punktes sind. In diesem sechsdimensionalen Raum sind die Gebilde, die wir als Kurven und Flächen zu bezeichnen pflegen, zweidimensional bzw. vierdimensional; die Bewegungsgruppe wird eine zwölfgliedrige, die Drehungsgruppe eine sechsgliedrige Gruppe. Treibt man nur reelle Geometrie, so operiert man in dem dreidimensionalen Unterraum

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0 \tag{10}$$

des $R_6$. Nur die Punkte dieses Unterraumes heißen *reelle Punkte*, alle anderen *imaginäre Punkte*. Es handelt sich hier um eine naheliegende Verallgemeinerung der bekannten Darstellung der komplexen Zahlen (d. h. der komplexen Geraden) in der (reellen) GAUSSschen Zahlenebene.[1])

Wenn nicht ausdrücklich anders angegeben, verstehen wir im folgenden stets unter dem (dreidimensionalen) Raum den *reellen* Raum (10).

Wir erinnern in diesem Zusammenhang noch daran, daß Funktionen komplexer Veränderlicher *analytisch*, d. h. in (konvergente) Potenzreihen entwickelbar und unbeschränkt differenzierbar sind, wenn sie nur einmal differenzierbar sind. Im komplexen Raum müssen wir also alle vorkommenden Funktionen als analytisch voraussetzen, wenn wir überhaupt *Differential*geometrie treiben wollen. Funktionen reeller Veränderlicher heißen analytisch, wenn sie in Potenzreihen entwickelbar sind. Konvergiert eine Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ für reelle $x$, für die $|x| < r$ ist, so konvergiert dieselbe Reihe auch für alle komplexen $x$, für die diese Ungleichung erfüllt ist. Entsprechendes gilt für Reihen in zwei und mehr Veränderlichen. Ein geometrisches Gebilde (Kurve, Fläche), das zunächst nur im reellen Raum durch analytische Funktionen definiert ist, läßt sich also stets (wenigstens in einem gewissen Bereich) in den komplexen Raum „fortsetzen". Nicht analytische Funktionen reeller Veränderlicher können sich formal, und zwar auf verschiedene Arten, auch für komplexe Werte der unabhängigen Veränderlichen erklären lassen, können aber dann nicht differenzierbar sein, selbst wenn sie im Reellen beliebig oft differenzierbar sind.[2])

---

1) Es wird nach dem Gesagten klar sein, weshalb man zweckmäßig von dem unendlichfernen *Punkt* der GAUSSschen Zahlenebene spricht, in scheinbarem Gegensatz zur unendlich fernen *Geraden* der affinen Ebene.

2) Näheres darüber findet man in allen größeren Lehrbüchern der Funktionentheorie; über Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher vgl. insbesondere OSGOOD, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, Bd. 2 (1. Lieferung 2. Aufl., Leipzig 1929).

## § 3. Die projektive Maßbestimmung und die nichteuklidischen Geometrien.

Wir haben in § 1 die affinen Transformationen unter den projektiven dadurch gekennzeichnet, daß wir die Invarianz einer bestimmten Ebene gefordert haben. Die Frage liegt nahe, ob nicht auch die Bewegungen unter den affinen Transformationen durch die Invarianz eines bestimmten geometrischen Gebildes charakterisiert werden können. Es zeigt sich, daß das zwar nicht für die Bewegungen selbst, wohl aber für die *äquiformen* oder *Ähnlichkeitstransformationen* gilt, die eine siebengliedrige Untergruppe der affinen Transformationen bilden. Diese äquiforme Gruppe nennt man nach F. Klein die *Hauptgruppe*. Die Geometrie dieser Gruppe umfaßt alle jene metrischen Eigenschaften eines Gebildes, die nicht direkt mit Längen, Flächen- oder Rauminhalten zusammenhängen, also z. B. alle jene Sätze der Dreiecksgeometrie, die von der Größe des Dreiecks unabhängig sind. Der Name „Ähnlichkeitstransformation" sagt ja gerade, daß jede Figur in eine ähnliche übergeführt wird. Jede solche Transformation läßt sich nämlich als Produkt einer Bewegung mit der *gleichförmigen Streckung*

$$x_i = \lambda \bar{x}_i, \quad \lambda \neq 0 \tag{1}$$

darstellen.[1]) Die Transformation (1) nennt man auch *zentrische Ähnlichkeit* (mit dem Ähnlichkeitszentrum im Ursprung). Sie läßt sich bei positivem $\lambda$ auch als eine Änderung der Maßstäbe auf den Koordinatenachsen deuten, wobei die Einheitsstrecken in *gleichem* Verhältnis verlängert oder verkürzt werden, je nachdem $\lambda < 1$ oder $\lambda > 1$ gilt. Mit $\lambda < 0$ ist (1) das Produkt einer derartigen Maßstabänderung und einer *Inversion* (Spiegelung am Ursprung).

Man erkennt nun auch leicht, daß die Hauptgruppe siebengliedrig ist, da wegen (1) zu den 6 Parametern der Bewegungsgruppe ein neuer Parameter $\lambda$ hinzutritt.

Die Ähnlichkeitstransformationen sind offenbar *winkeltreu*. Wir zeigen zunächst, daß eine affine Transformation, die rechte Winkel stets wieder in rechte Winkel überführt, winkeltreu und somit eine Ähnlichkeitstransformation ist.[2]) Sei (Fig. 1) der Winkel $\alpha$ mit dem Scheitel $A$ gegeben. Wir wählen auf dem einen Schenkel einen Punkt $B$ und errichten über $AB$ das Quadrat

---

1) Eine nicht gleichförmige Streckung wäre etwa

$$x_i = a_{ik} \bar{x}_k,$$

wo $a_{ik} = 0$ ist für alle $i \neq k$, während $a_{11}, a_{22}, a_{33}$ beliebig, aber voneinander verschieden sind. Ist $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \lambda$, so kommt man wieder auf (1).

2) Nicht jede winkeltreue Transformation ist eine Ähnlichkeitstransformation, wohl aber jede affine Transformation, die zugleich winkeltreu ist.

$ABCD$ so, daß die Seite $BC$ vom zweiten Schenkel von $\alpha$ in einem Punkt $P$ geschnitten wird. Durch eine affine Transformation, die rechte Winkel erhält, geht das Quadrat $ABCD$ in ein Quadrat (d.i. ein Rechteck mit senkrechten Diagonalen!) $A'B'C'D'$ über; $P'$ sei der $P$ entsprechende Punkt auf $B'C'$. Nun

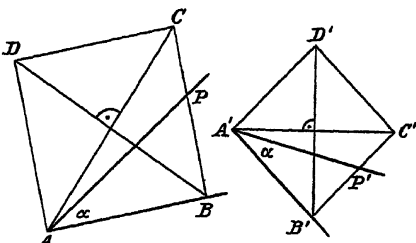



Fig. 1.

ist aber nach einer fundamentalen Eigenschaft[1]) der affinen Transformationen $\frac{BP}{PC} = \frac{B'P'}{P'C'}$, also gilt auch $\frac{BP}{BC} = \frac{B'P'}{B'C'}$ und wegen $BC = AB$, $B'C' = A'B'$ auch $\tan\alpha = \frac{BP}{AB} = \frac{B'P'}{A'B'} = \tan\alpha'$. Es ist also in der Tat $\alpha = \alpha'$.

Steht nun eine Gerade $G$ senkrecht auf einer Ebene $\varepsilon$, so ist der uneigentliche Punkt von $G$ der Pol der uneigentlichen Geraden von $\varepsilon$ bezüglich des absoluten Kegelschnittes[2]), durch den somit die ganze äquiforme Geometrie festgelegt ist.

---

1) Die Invarianz des Teilverhältnisses $\frac{AB}{BC}$ dreier Punkte $A, B, C$ einer Strecke. Die drei Punkte mögen in einem Koordinatensystem $x_i'$ die Koordinaten $(0, 0, 0)$, $(b, 0, 0)$, $(c, 0, 0)$ haben. Durch die Transformation $x_i = a_{ik} x_k'$ (wir sehen von Parallverschiebungen, für die die Sache trivial ist, ab) erhält man drei Punkte mit den Koordinaten (im System $x_i$) $(0, 0, 0)$, $(a_{11}b, a_{21}b, a_{31}b)$, $(a_{11}c, a_{21}c, a_{31}c)$. Ihr Teilverhältnis ist dasselbe, wie das der drei ursprünglichen Punkte, nämlich $\frac{b}{c-b}$.

2) Es sei $a_i$ ein Punkt des auf rechtwinklige Koordinaten bezogenen euklidischen Raumes, $x_i - a_i$ und $y_i - a_i$ zwei Richtungen (Vektoren, vgl. § 4) durch $a_i$. Dann ist

$$\text{(I)} \qquad (x_i - a_i)(y_i - a_i) = 0$$

die Bedingung dafür, daß die beiden Richtungen aufeinander senkrecht stehen. Denken wir uns den Punkt $y_i$ und damit die Gerade $g$ durch $a_i$ und $y_i$ festgehalten, so ist (I) bei variablem $x_i$ die Gleichung der Polarebene $\varepsilon$ von $g$ bezüglich des nullteiligen (d.h. bis auf den Scheitel $a_i$ keine reellen Punkte besitzenden) Kegels

$$\text{(II)} \qquad (x_i - a_i)(x_i - a_i) = 0,$$

so daß alle zu $g$ senkrechten Geraden durch $a_i$ in $\varepsilon$ liegen. Führen wir nun in (II) wie in der Fußnote 1) auf S. 6 homogene Koordinaten $z_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ ein, so erhalten wir aus (II)

$$\text{(III)} \qquad (z_i - a_i z_4)(z_i - a_i z_4) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

und somit als Schnitt mit der uneigentlichen Ebene $z_4 = 0$

$$\text{(IV)} \qquad z_i z_i = 0, \quad z_4 = 0,$$

also einen nullteiligen Kegelschnitt, der eben der *absolute Kegelschnitt* genannt wird. Man beachte, daß die $a_i$ in (IV) nicht mehr vorkommen, woraus folgt, daß alle nullteiligen Kegel, wo immer ihr Scheitel liegt, die uneigentliche Ebene in demselben Kegelschnitt (IV) treffen. Eine Gerade $g$ und eine Ebene $\varepsilon$ sind senkrecht, wenn der uneigentliche

Wenn wir nur solche affine Transformationen zulassen, die einen nullteiligen Kegelschnitt der uneigentlichen Ebene in sich überführen, so muß sich die Hauptgruppe ergeben. Man kann noch einen Schritt weitergehen und die Ähnlichkeitstransformationen — also die Transformationen der Hauptgruppe — als jene *projektiven* Transformationen charakterisieren, die einen bestimmten nullteiligen Kegelschnitt und damit natürlich auch die Ebene dieses Kegelschnittes (die dann als uneigentliche Ebene zu bezeichnen ist) in sich überführen. Jede äquiforme Eigenschaft eines Gebildes ist also eine projektive Eigenschaft des Gebildes *und* des absoluten Kegelschnittes. Diese Tatsache soll durch die Redeweise „projektive Maßbestimmung" hervorgehoben werden.

Alle Gebilde, die zum absoluten Kegelschnitt eine *spezielle* Lage haben (z. B. schneidende Gerade, berührende Ebenen), nennen wir im folgenden *isotrop*.

Der absolute Kegelschnitt ist in Ebenenkoordinaten eine ausgeartete Fläche zweiter Klasse (die Gesamtheit aller Ebenen, die den Kegelschnitt berühren, d. h. Tangenten des Kegelschnittes enthalten). Man kommt zu allgemeineren Geometrien, wenn man an Stelle dieser ausgearteten eine allgemeine Fläche zweiter Klasse, die dann auch eine nicht ausgeartete Fläche zweiter Ordnung (Gesamtheit aller Punkte der Fläche) ist, als absolutes Gebilde zugrunde legt. Man beschränkt sich aber in der Regel auf zwei Typen: die *elliptische Geometrie*, wo die absolute Fläche nullteilig ist, und die *hyperbolische Geometrie*, wo die absolute Fläche einteilig ist, d. h. reelle Punkte, aber imaginäre Erzeugende hat (*ovale* Fläche nach F. Klein). Die zugehörigen Transformationsgruppen bestehen aus jenen projektiven Transformationen, die das absolute Gebilde in sich überführen. Man nennt diese Transformationen elliptische bzw. hyperbolische Bewegungen; sie bilden wie die euklidischen Bewegungen, die wir in § 1 und § 2 untersucht haben, eine sechsgliedrige Gruppe. Ein Analogon zu den Ähnlichkeitstransformationen gibt es hier nicht. Der Abstand $d$ zweier Punkte $A$ und $B$ wird erklärt durch

$$d = k \ln D(A, B, P', P''), \tag{2}$$

wo $P'$ und $P''$ die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden $AB$ mit der absoluten Fläche sind und $D(A, B, P', P'')$ das Doppelverhältnis der vier Punkte $A, B, P', P''$ bedeutet. Der Winkel $\delta$ zweier Ebenen $\alpha$ und $\beta$ ist analog

$$\delta = k' \ln D(\alpha, \beta, \tau', \tau''), \tag{3}$$

wo $\tau'$ und $\tau''$ die Tangentenebenen sind, die sich aus der Schnittgeraden $\alpha\beta$

---

Punkt $g_\infty$ von $g$ und die uneigentliche Gerade $\varepsilon_\infty$ von $\varepsilon$ konjugiert sind bezüglich des absoluten Kegelschnittes. Ersetzt man $g$ durch eine parallele Gerade $g'$ und $\varepsilon$ durch eine Parallelebene $\varepsilon'$, so bleiben $g_\infty$ und $\varepsilon_\infty$ unverändert, und ebenso ist $g'$ senkrecht zu $\varepsilon'$, wenn $g$ senkrecht zu $\varepsilon$ war.

der beiden Ebenen an die absolute Fläche legen lassen. Die Konstante $k'$ wird rein imaginär, in der Regel gleich $\frac{1}{2i}$ ($i^2 = -1$) angenommen, die Konstante $k$ ist in der elliptischen Geometrie rein imaginär, in der hyperbolischen aber reell.

Die so definierten Abstände und Winkel sind invariant gegenüber allen projektiven Transformationen, die die absolute Fläche in sich überführen, d. h. gegenüber allen (nichteuklidischen oder euklidischen) Bewegungen.[1])

Selbstverständlich sind mit euklidischer, elliptischer und hyperbolischer Geometrie noch nicht alle denkbaren Typen erschöpft. Man kann z. B. an Stelle des nullteiligen absoluten Kegelschnittes der euklidischen Geometrie einen einteiligen zugrunde legen; derartige Geometrien nennt man *pseudoeuklidisch*. Das Interesse an derartigen Konstruktionen hat seinen Grund zum Teil darin, daß isotrope Gebilde im Gegensatz zur euklidischen Geometrie reell sind.

---

1) Wir werden in VII, § 2 noch ausführlicher auf die nichteuklidischen Geometrien der Ebene zurückkommen. Vorläufig sei nur darauf hingewiesen, daß die Winkeldefinition (3) mit $k' = \frac{1}{2i}$ unverändert auch in der euklidischen Geometrie gilt. Sind nämlich zwei Ebenen $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ gegeben, so denken wir uns rechtwinklige kartesische Koordinaten $x_i$ so gewählt, daß $\varepsilon_1$ die Gleichung $x_1 = 0$ und $\varepsilon_2$ die Gleichung $x_1 = a x_2$ hat. Dann ist offenbar

$$\alpha = \arctan a$$

der von $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ eingeschlossene Winkel. Da andrerseits $x_1 = \pm i x_2$ die isotropen (d. h. den absoluten Kegelschnitt des euklidischen Raumes berührenden) Ebenen durch die Schnittgerade $x_1 = x_2 = 0$ von $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ sind, folgt aus (3)

$$\delta = \frac{1}{2i} \ln D(0, a, -i, +i) = \frac{1}{2i} \ln \frac{i-a}{i+a},$$

also wegen

$$\arctan a = \frac{1}{2i} \ln \frac{i-a}{i+a}$$

in der Tat $\delta = \alpha$. Auch in der euklidischen Geometrie haben wir also eine elliptische Winkelmetrik! Dagegen versagt die Abstandsdefinition (1) im euklidischen Fall, wie es ja auch sein muß, da der Abstand zweier Punkte keine Invariante der Hauptgruppe ist.

Es lassen sich jedoch — übrigens schon in der affinen Geometrie — auf jeder Geraden (euklidisch) äquidistante Skalen konstruieren. Hat man nämlich zwei Punkte $A$ und $B$, so gibt es auf der Geraden durch $A, B$ stets einen und nur einen Punkt $C$, so daß das Teilverhältnis (vgl. die Fußnote 1 S. 17) $\frac{AB}{BC} = 1$, also $AB = BC$ wird usw. Bemerkt sei, daß das Teilverhältnis dreier *beliebiger* Punkte $A, B, C$ einer Geraden $g$ als Doppelverhältnis von $A, B, C$ und dem unendlichfernen Punkte $P_\infty$ von $g$ angesehen werden kann, und zwar ist

$$\frac{AB}{BC} = -D(ACBP_\infty).$$

## § 4. Vektoren und Tensoren im euklidischen Raum. Überschiebungen.

Wir haben gesehen, daß die obigen Geometrien mit den Invariantentheorien bestimmter Transformationsgruppen identisch sind. Insbesondere ist die euklidische Geometrie die Invariantentheorie der Bewegungsgruppe

$$x_i = a_{ik}\bar{x}_k + b_i, \tag{1}$$

wo die Koeffizienten $a_{ik}$ den Bedingungen

$$a_{ji}a_{jk} = \delta_{ik} \tag{2}$$

und

$$a_{ij}a_{kj} = \delta_{ik} \tag{3}$$

genügen (vgl. (1, 16) und (2, 6)).

Zur Herleitung von Invarianten werden wir im folgenden ganz systematisch den Vektor- und Tensorkalkül verwenden; wir wollen also zunächst die Grundbegriffe des Kalküls in aller Kürze erklären. Es handelt sich ja nur um die formale Seite, denn der sachliche Inhalt beschränkt sich hier auf die allereinfachsten Bewegungsinvarianten, die dem Leser aus der analytischen Geometrie bekannt sein müssen, nämlich um die Größen von Strecken, Flächenstücken, Raumteilen und Winkeln.

Wir definieren vor allem: *Ein Vektor ist ein System von drei Zahlen* $\xi_i$, *die wir die Komponenten des Vektors nennen und die sich bei Ausführung einer Bewegung* (1), (2) *nach dem Gesetz*

$$\xi_i = a_{ik}\bar{\xi}_k \tag{4}$$

*transformieren.* Die Differenzen entsprechender Koordinaten ${}_{(1)}x_i$ und ${}_{(2)}x_i$ zweier Punkte bilden einen Vektor, denn aus (1) folgt

$${}_{(1)}x_i - {}_{(2)}x_i = (a_{ik}\,{}_{(1)}\bar{x}_k + b_i) - (a_{ik}\,{}_{(2)}\bar{x}_k + b_i) = a_{ik}({}_{(1)}\bar{x}_k - {}_{(2)}\bar{x}_k),$$

und umgekehrt kann man jeden Vektor durch die Koordinatendifferenzen zweier Punkte darstellen. Diese beiden Punkte sind aber offenbar nicht eindeutig bestimmt. Ist nämlich für ein bestimmtes Punktepaar

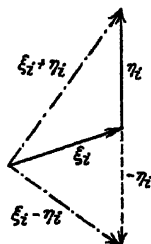
$$\xi_i = {}_{(1)}x_i - {}_{(2)}x_i, \tag{5}$$

so gilt bei gegebenem Vektor $\xi_i$ dieselbe Relation für alle Punkte, die aus ${}_{(1)}x_i$ und ${}_{(2)}x_i$ durch simultane (d. h. auf beide Punkte gleicherweise anzuwendende) Parallelverschiebung entstehen. *Wir können uns also unter einem Vektor eine orientierte* (d. h. mit einem bestimmten Durchlaufungssinn versehene) *Strecke fester Länge und fester Richtung vorstellen,* die nicht notwendig an einen bestimmten Platz im Raum gebunden, sondern im allgemeinen als durchaus frei beweglich anzusehen ist. Mit anderen Worten: Ist der Vektor $\xi_i$

gegeben, so kann man seinen *„Anfangspunkt“* ${}_{(2)}x_i$ willkürlich wählen; der *„Endpunkt“* ${}_{(1)}x_i = {}_{(2)}x_i + \xi_i$ ist dann eindeutig bestimmt. Vertauscht man Anfangs- und Endpunkt, so kehrt sich die Orientierung des Vektors um, während Länge und Richtung[1]) erhalten bleiben. Wie man aus (5) unmittelbar erkennt, ändern dabei alle Komponenten ihr Vorzeichen, d. h. der Vektor $\xi_i$ geht über in den Vektor $-\xi_i$. Mitunter ergibt sich allerdings die Notwendigkeit, den Anfangspunkt eines Vektors festzulegen. Man spricht dann auch von *gebundenen Vektoren* im Gegensatz zu den *freien Vektoren* mit willkürlichem Anfangspunkt. Ein Mittelding ist der besonders in der Mechanik wichtige *linienflüchtige Vektor* oder *Stab*, dessen Anfangspunkt auf einer Geraden, deren Richtung mit der Richtung des Vektors übereinstimmt, willkürlich verschoben werden darf.[2])

$\xi_i + \eta_i$ $\eta_i$ $\xi_i$ $-\eta_i$ $\xi_i - \eta_i$

Fig. 2.

Summe und Differenz zweier Vektoren sowie das Produkt eines Vektors mit einer Zahl sind wieder Vektoren. Der Leser möge das an Hand der obigen Definition des Vektors selbst bestätigen. Das Produkt eines Vektors $\xi_i$ mit einer Zahl $k$ erhält man, indem man jede Komponente mit $k$ multipliziert, es ist also gleich $k\xi_i$.

Die geometrische Deutung von Summe und Differenz zweier Vektoren (Satz vom Vektorparallelogramm) ist aus Fig. 2 zu entnehmen.

*Es seien $m$ Vektoren ${}_{(\alpha)}\xi_i$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ gegeben. Gibt es dann $m$ Zahlen ${}_{(\alpha)}k$, von denen mindestens eine von Null verschieden ist, so daß*

$$ {}_{(\alpha)}k \; {}_{(\alpha)}\xi_i = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m) \tag{6}$$

(über $\alpha$ ist von 1 bis $m$ zu summieren!) *ist für alle $i$* $(= 1, 2, 3)$, *so heißen die*

---

1) Wir unterscheiden also die „Richtung“ schlechthin, z. B. die Richtung einer Geraden von der „orientierten Richtung“, d. h. Richtung und Durchlaufungssinn.

2) Weder gebundene noch linienflüchtige Vektoren sind nach unserer Definition Vektoren, da sie mehr als drei Bestimmungsstücke haben, z. B. der gebundene Vektor die drei Koordinaten $x_i$ seines Anfangspunktes und die drei Komponenten $\xi_i$. Der Begriff des gebundenen Vektors ist gerade für die Weiterentwicklung des Vektorkalküls in allgemeineren Räumen von Wichtigkeit. Vgl. III, § 3 und Band 2, Abschnitt I.

Die drei Koordinaten eines Punktes sind kein Vektor, da sie sich bei Ausführung einer Bewegung nach dem Gesetz (1) und nicht nach (4) transformieren. Um aber doch eine kurze Bezeichnung zu haben, nennen wir sie den *„Ortsvektor“* des betreffenden Punktes. *Der Anfangspunkt des Ortsvektors ist stets der Ursprung des gerade zugrunde gelegten Koordinatensystems*, Ortsvektoren sind also durchaus abhängig vom Koordinatensystem. Aber die Differenz zweier Ortsvektoren ist ein Vektor, und umgekehrt läßt sich jeder Vektor als Differenz zweier Ortsvektoren darstellen. Man kann Ortsvektoren auch als eine Art gebundener Vektoren ansehen, deren Anfangspunkt stets der Ursprung des gerade zugrunde gelegten Koordinatensystems ist, also im allgemeinen nicht dem Transformationsgesetz (1) genügt.

*m Vektoren linear abhängig, im anderen Fall linear unabhängig.* Die drei Gleichungen (6) bilden ein System homogener linearer Gleichungen für die Unbekannten ${}_{(\alpha)}k$. Ist $m > 3$, so existiert stets eine von der *trivialen* oder *Nullösung*, bei der alle ${}_{(\alpha)}k = 0$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ sind, verschiedene Lösung; d. h. *mehr als drei Vektoren sind stets linear abhängig.* Ist $m = 3$, so besitzt das System (6) dann und nur dann eine von der trivialen verschiedene Lösung, wenn die aus den Komponenten der drei Vektoren gebildete Determinante

$$\begin{vmatrix} {}_{(1)}\xi_1 & {}_{(1)}\xi_2 & {}_{(1)}\xi_3 \\ {}_{(2)}\xi_1 & {}_{(2)}\xi_2 & {}_{(2)}\xi_3 \\ {}_{(3)}\xi_1 & {}_{(3)}\xi_2 & {}_{(3)}\xi_3 \end{vmatrix} \tag{7}$$

verschwindet; es gilt also umgekehrt: *Drei Vektoren sind linear unabhängig, wenn die Determinante* (7) *ihrer Komponenten von Null verschieden ist. Hat man drei linear unabhängige Vektoren, so ist jeder andere von ihnen linear abhängig.* Ist $m = 2$, so sind die beiden Vektoren ${}_{(1)}\xi_i$ und ${}_{(2)}\xi_i$ linear abhängig, wenn alle zweireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{pmatrix} {}_{(1)}\xi_1 & {}_{(1)}\xi_2 & {}_{(1)}\xi_3 \\ {}_{(2)}\xi_1 & {}_{(2)}\xi_2 & {}_{(2)}\xi_3 \end{pmatrix}$$

verschwinden; dann ist einer von ihnen gleich dem Produkt des anderen mit einer Zahl, wie aus (6) für $m = 2$ unmittelbar folgt. Im Fall $m = 1$ schließlich reduziert sich das System (6) auf

$$k\,\xi_i = 0; \tag{8}$$

ist hier $k \neq 0$, so muß $\xi_i = 0$ der *Nullvektor* sein, dessen Komponenten alle verschwinden.

Bemerkt sei, daß $m$ Vektoren immer linear abhängig sind, wenn einer von ihnen der Nullvektor ist, gleichgültig, welchen Wert $m$ hat.

Von größerem Interesse ist der Begriff linear abhängiger Vektoren also eigentlich nur im Fall $m = 2$ und $m = 3$. Aus (6) erkennt man sofort, daß zwei Vektoren, von denen keiner der *Nullvektor* ist, dann und nur dann linear abhängig sind, wenn sie dieselbe *Richtung* haben. Denn einer der beiden Koeffizienten ${}_{(\alpha)}k$ muß von Null verschieden sein; sei dies etwa ${}_{(1)}k$. Dann folgt aber in der Tat ${}_{(1)}\xi_i = -\frac{{}_{(2)}k}{{}_{(1)}k}\,{}_{(2)}\xi_i$. Es ist also auch ${}_{(2)}k \neq 0$. Sind zwei Vektoren linear unabhängig, so bestimmen sie eine Ebenenstellung, nämlich jene, die zu den Richtungen beider Vektoren parallel ist.

Es sei nun $m = 3$. Dann können wir im Fall der linearen Abhängigkeit (wenn keiner der drei Vektoren der Nullvektor ist) wieder etwa ${}_{(1)}k \neq 0$ annehmen und

$${}_{(1)}\xi_i = -\frac{{}_{(2)}k}{{}_{(1)}k}\,{}_{(2)}\xi_i - \frac{{}_{(3)}k}{{}_{(1)}k}\,{}_{(3)}\xi_i$$

schreiben. Es ist also ${}_{(1)}\xi_i$ die Summe zweier Vektoren und somit der von diesen, d. h. von ${}_{(2)}\xi_i$ und ${}_{(3)}\xi_i$ bestimmten Ebenenstellung parallel. Man sagt kurz, *die drei Vektoren liegen in einer Ebene.*[1]) Das ist offenbar eine notwendige und hinreichende Bedingung für lineare Abhängigkeit von drei Vektoren. Sind die beiden Vektoren ${}_{(2)}\xi_i$ und ${}_{(3)}\xi_i$ selbst schon linear abhängig, also von derselben Richtung, so hat auch ${}_{(1)}\xi_i$ diese Richtung. Selbstverständlich liegen die drei Vektoren auch dann in einer Ebene, die aber nicht eindeutig bestimmt ist.

Für das Quadrat der Länge $\xi \geqq 0$ eines Vektors $\xi_i$ erhält man nach dem Satz des Pythagoras

$$\xi^2 = \xi_i \xi_i = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2. \tag{9}$$

Man nennt $\xi^2$ die *Norm* und $\xi$ den *absoluten Betrag* des Vektors $\xi_i$. Der absolute Betrag ist nie negativ und nur bei Nullvektoren gleich Null. Im komplexen Raum (§ 2) gilt das nicht; es existieren hier imaginäre Vektoren, deren Norm Null ist, ohne daß alle Komponenten verschwinden, z. B. der Vektor $(0, 1, i)$, wo $i^2 = -1$, also $i$ die imaginäre Einheit ist. Wir nennen diese Vektoren *isotrop* (vgl. § 3). Die Endpunkte sämtlicher isotroper Vektoren mit festem Anfangspunkt $P$ liegen auf einem nullteiligen Kegel, der die uneigentliche Ebene im absoluten Kegelschnitt schneidet. [Vgl. hierzu die Anmerkung 2) auf S. 17.]

Vektoren von der Norm oder Länge Eins heißen *normierte Vektoren* oder *Einheitsvektoren.* Zu jedem Vektor $\xi_i$, der nicht der Nullvektor ist, gibt es einen Einheitsvektor, der mit $\xi_i$ in Richtung und Sinn übereinstimmt. Wir bezeichnen in naheliegender Weise diesen Einheitsvektor mit sign $\xi_i$[2]); es ist also

$$\operatorname{sign} \xi_i = \frac{1}{\xi} \xi_i. \tag{10}$$

*Die Komponenten eines Einheitsvektors sind offenbar seine Richtungskosinus.*

Es seien nun $\xi_i$ und $\eta_i$ zwei beliebige Vektoren. Wir nehmen zunächst an, daß keiner von ihnen der Nullvektor sei, und bilden den Ausdruck

$$\xi_i \eta_i = \xi \eta (\operatorname{sign} \xi_i)(\operatorname{sign} \eta_i),$$

der als *Überschiebung* oder *inneres Produkt* von $\xi_i$ und $\eta_i$ bezeichnet wird. Nun ist aber, da sign $\xi_i$ die Richtungskosinus von $\xi_i$, sign $\eta_i$ die von $\eta_i$ sind, nach einer elementaren Formel der analytischen Geometrie

$$\operatorname{sign} \xi_i \operatorname{sign} \eta_i = \cos \vartheta,$$

1) Es wäre zu ergänzen: wenn man sie so verschiebt, daß ihre Anfangspunkte in einer Ebene der obigen Stellung liegen.

2) Es ist nach (10) $\xi_i = \xi \operatorname{sign} \xi_i$,
so wie bei einer reellen Zahl $x = |x| \operatorname{sign} x$ gilt.

wo $\vartheta$ der Winkel der beiden Richtungen von $\xi_i$ und $\eta_i$ ist. Es folgt also

(11) $$\xi_i \eta_i = \xi \eta \cos \vartheta;$$

*die Überschiebung zweier Vektoren ist also gleich dem Produkt der beiden Längen mal dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels,* also eine (absolute) *Invariante,* was sich auch durch Rechnung ohne weiteres bestätigen läßt:

$$\xi_i \eta_i = a_{ij} \bar{\xi}_j a_{ik} \bar{\eta}_k = a_{ij} a_{ik} \bar{\xi}_j \bar{\eta}_k = \delta_{jk} \bar{\xi}_j \bar{\eta}_k = \bar{\xi}_j \bar{\eta}_j .$$

Die Überschiebung ist *kommutativ,* d. h. es ist $\xi_i \eta_i = \eta_i \xi_i$, was wegen (11) auch unmittelbar einzusehen ist, da der Kosinus eine gerade Funktion ist $(\cos \vartheta = \cos(-\vartheta))$. Ist

(12) $$\xi_i \eta_i = 0,$$

so ist entweder einer der beiden Vektoren der Nullvektor, oder aber es ist $\cos \vartheta = 0$, d. h. *die beiden Vektoren stehen aufeinander senkrecht.* Ist $\xi_i$ ein Einheitsvektor, also $\xi_i \xi_i = 1$, so ist

$$\xi_i \eta_i = \eta \cos \vartheta$$

die Länge $\bar{\eta}$ der *Projektion* von $\eta_i$ in die Richtung von $\xi_i$ oder die *Komponente* von $\eta_i$ in der Richtung von $\xi_i$. Ist $\xi_i$ kein Einheitsvektor, so ist

Fig. 3.

(13) $$\bar{\eta} = \frac{1}{\xi} \xi_i \eta_i .$$

Die Projektion selbst, als Vektor angesehen (Fig. 3), ist dann

(14) $$\bar{\eta}_i = \bar{\eta} \frac{\xi_i}{\xi} = \frac{1}{\xi^2} (\xi_j \eta_j) \xi_i = \frac{\xi_j \eta_j}{\xi_k \xi_k} \xi_i .$$

Die Differenz

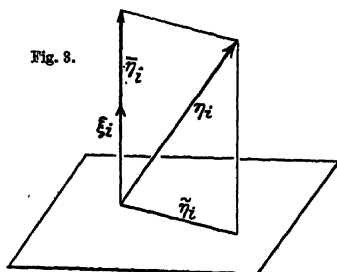
(15) $$\tilde{\eta}_i = \eta_i - \bar{\eta}_i = \eta_i - \frac{\xi_j \eta_j}{\xi_j \xi_j} \xi_i$$

ist dann nichts anderes als die Projektion (als Vektor) von $\eta_i$ in eine zu $\xi_i$ senkrechte Ebene. Es folgt: *Jeder Vektor läßt sich in eindeutiger Weise als Summe von zwei Vektoren darstellen, von denen der erste parallel, der zweite senkrecht zu einer gegebenen Ebene ist.*

Drei Vektoren ${}_{(j)}\xi_i$, die zu je zweien aufeinander senkrecht stehen, für die also

(16) $${}_{(2)}\xi_j \, {}_{(3)}\xi_j = {}_{(3)}\xi_j \, {}_{(1)}\xi_j = {}_{(1)}\xi_j \, {}_{(2)}\xi_j = 0$$

gilt, bilden ein *rechtwinkliges Dreibein.* Sie sind immer linear unabhängig, da sie nicht in einer Ebene liegen. Sind die drei Vektoren außerdem Einheits-

vektoren, so spricht man von einem *normierten Dreibein.* Es gilt dann neben (16) auch

(17) $$_{(1)}\xi_j\,_{(1)}\xi_j = {}_{(2)}\xi_j\,_{(2)}\xi_j = {}_{(3)}\xi_j\,_{(3)}\xi_j = 1;$$

die sechs Relationen (16) und (17) lassen sich in

(18) $$_{(i)}\xi_j\,_{(k)}\xi_j = \delta_{ik}$$

zusammenfassen. Bemerkt sei, daß aus dem Bestehen von (18) auch das von

(19) $$_{(i)}\xi_j\,_{(i)}\xi_k = \delta_{jk}$$

folgt und umgekehrt. Der Beweis ist ganz analog dem Beweis von (2, 6) als Folge von (1, 16).

Es sei $_{(j)}e_i$ der Einheitsvektor, der in Richtung und Sinn mit der $x_j$-Achse des Koordinatensystems übereinstimmt ($j = 1, 2, 3$). Es ist offenbar

(20) $$_{(j)}e_i = \delta_{ij}.$$

Man nennt diese drei Vektoren in naheliegender Weise die *Maßvektoren* des Koordinatensystems. Sie haben natürlich keine von diesem unabhängige Bedeutung. Die Maßvektoren $_{(j)}\bar{e}_k = \delta_{kj}$ des Systems $\bar{x}_i$ haben wegen (4) im System $x_i$ die Komponenten

(21) $$_{(j)}\xi_i = a_{ik}\,_{(j)}\bar{e}_k = a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij};$$

und da sie selbstverständlich ebenfalls Einheitsvektoren sind, ergibt sich aus

(22) $$_{(j)}\xi_i\,_{(k)}e_i = a_{ij}\delta_{ik} = a_{kj}$$

die geometrische Deutung der Drehungskoeffizienten als Richtungskosinus, wie wir sie bereits auf S. 8 angegeben haben.

Wegen

(23) $$_{(j)}e_i\,_{(k)}e_i = \delta_{ij}\delta_{ik} = \delta_{jk}$$

bilden die drei Maßvektoren ein normiertes Dreibein, wie es ja bei rechtwinkligen kartesischen Koordinaten sein muß.

Seien $_{(j)}\xi_i$ die Vektoren eines beliebigen normierten Dreibeins, das rechtsorientiert ist, wenn man die Vektoren in der Reihenfolge $j = 1, 2, 3$ nimmt [vgl. die Anmerkung 1) auf S. 2]. Dann muß es stets möglich sein, das Koordinatensystem so zu drehen, daß diese drei Vektoren die Maßvektoren des neuen Systems werden. Diese Drehung erhält man aber unmittelbar aus (21):

(24) $$x_i = {}_{(j)}\xi_i\,\bar{x}_j.$$

Ist das Dreibein der drei Vektoren ${}_{(j)}\xi_i$ links orientiert, so muß (24) eine uneigentlich orthogonale Transformation sein, d. h. es muß die Determinante

$$(25)\qquad \begin{vmatrix} {}_{(1)}\xi_1 & {}_{(1)}\xi_2 & {}_{(1)}\xi_3 \\ {}_{(2)}\xi_1 & {}_{(2)}\xi_2 & {}_{(2)}\xi_3 \\ {}_{(3)}\xi_1 & {}_{(3)}\xi_2 & {}_{(3)}\xi_3 \end{vmatrix}$$

den Wert $-1$ haben und umgekehrt. Es folgt also: *Ein normiertes Dreibein ist rechts- oder linksorientiert, je nachdem die Determinante* (25) *gleich* $+1$ *oder gleich* $-1$ *ist.* Ist das Dreibein nicht normiert, aber rechtwinklig, und sind ${}_{(j)}\xi$ bzw. die Längen der Vektoren ${}_{(j)}\xi_i$, so hat (25) den Wert $+{}_{(1)}\xi\,{}_{(2)}\xi\,{}_{(3)}\xi$ oder $-{}_{(1)}\xi\,{}_{(2)}\xi\,{}_{(3)}\xi$, je nachdem das Dreibein rechts- oder linksorientiert ist. Den Fall nicht rechtwinkliger Dreibeine werden wir im nächsten Paragraphen besprechen.

Wir betrachten nun eine in den Komponenten von $m$ Vektoren lineare Form

$$(26)\qquad f = A_{ijk\ldots}\,\xi_i\eta_j\zeta_k\ldots,$$

also eine *mfach lineare Form.* Ist $f$ selbst eine Invariante, ist also bei einer Bewegung des Koordinatensystems stets $f = \bar{f}$, so nennen wir die $3^m$ Koeffizienten $A_{ijk\ldots}$ einen *Tensor m ter Stufe.* Bei Ausübung einer Bewegung (1), (2) transformieren sich die Vektoren $\xi_i, \eta_j, \zeta_k, \ldots$ nach (4); die transformierte Form $\bar{f}$ wird also

$$\bar{f} = f = A_{ijk\ldots}\,a_{ih}\,a_{jl}\,a_{kr}\ldots\,\bar{\xi}_h\,\bar{\eta}_l\,\bar{\zeta}_r\ldots.$$

Als Koeffizienten der transformierten Form werden wir somit die Größen

$$(27)\qquad \bar{A}_{hlr\ldots} = A_{ijk\ldots}\,a_{ih}\,a_{jl}\,a_{kr}\ldots$$

und die Gleichungen (27) als das Transformationsgesetz eines Tensors $m$ter Stufe anzusehen haben. Genügt umgekehrt ein System von $3^m$ Zahlen diesem Transformationsgesetz, so ist es ein Tensor $m$ter Stufe, da aus (27) sofort die Invarianz von (26) folgt. Die einzelnen Zahlen $A_{ijk\ldots}$ heißen *Komponenten* des Tensors.

Sei $A_i$ ein Tensor erster Stufe. An Stelle von (26) erhalten wir die invariante Linearform

$$(28)\qquad f = A_i\xi_i$$

und das Transformationsgesetz des Tensors $A_i$ lautet

$$(29)\qquad \bar{A}_h = a_{ih}A_i;$$

das ist aber gerade das Transformationsgesetz (4) von Vektoren, nur in der nach den gestrichenen Komponenten aufgelösten Form. Multipliziert man nämlich (29) mit $a_{jh}$ und summiert über $h$, so folgt wegen (2, 6)

$$\bar{A}_h\,a_{jh} = a_{jh}\,a_{ih}\,A_i = \delta_{ji}\,A_i = A_j$$

oder

(30) $$A_i = a_{ik}\bar{A}_k.$$

Die beiden Begriffe „Tensor erster Stufe“ und „Vektor“ sind somit identisch. Die Form (28) ist nichts anderes als die Überschiebung der beiden Vektoren $A_i$ und $\xi_i$.

Multipliziert man jede Komponente eines Vektors $A_i$ mit jeder Komponente eines zweiten Vektors $B_i$, so erhält man ein System von neun Zahlen

(31) $$C_{ij} = A_i B_j,$$

die offenbar einen besonderen Tensor zweiter Stufe bilden, den man als das *allgemeine Produkt* oder kurz als das *Produkt* schlechthin der beiden Vektoren $A_i$ und $B_j$ bezeichnet. Dasselbe gilt vom Produkt mehrerer Vektoren.

Ein weiteres Beispiel eines Tensors zweiter Stufe sind die neun Größen $\delta_{ij}$. Die Bilinearform

(32) $$\delta_{ij}\xi_i\eta_j = \xi_i\eta_i$$

ist ja nichts anderes als die Überschiebung der beiden Vektoren $\xi_i$ und $\eta_i$, also in der Tat eine Invariante. Den Tensorcharakter der $\delta_{ij}$ kann man ohne weiteres auch aus den Transformationsgleichungen (27) bestätigen; es wird

$$\bar{\delta}_{hl} = \delta_{ij}\,a_{ih}\,a_{jl} = a_{jh}\,a_{jl} = \delta_{hl}.$$

Der Tensor $\delta_{ik}$ heißt der *Maßtensor* (des euklidischen Raumes).

Wir stellen noch einige allgemeine Definitionen und Sätze über Tensoren im euklidischen $R_3$ zusammen.

Seien $A_{ijk\ldots}$ und $B_{ijk\ldots}$ zwei *gleichartige* Tensoren, d. h. Tensoren gleicher Stufe. Dann ist das System der $3^m$ Zahlen, die man durch Addition entsprechender Komponenten (d. h. solcher mit gleichen Indizes) der beiden Tensoren erhält, ebenfalls ein Tensor $C_{ijk\ldots}$, den man die *Summe* der gegebenen Tensoren nennt. Man schreibt

(33) $$C_{ijk\ldots} = A_{ijk\ldots} + B_{ijk\ldots}.$$

Sind $A_{ijk\ldots}$ und $B_{rst\ldots}$ zwei *beliebige*, d. h. nicht notwendig gleichartige Tensoren von $m$ter und $n$ter Stufe, so erhält man durch Multiplikation jeder Komponente des ersten mit jeder Komponente des zweiten Tensors ein System von $3^{n+m}$ Zahlen

(34) $$C_{ijk\ldots rst\ldots} = A_{ijk\ldots}\,B_{rst\ldots},$$

die, wie ebenfalls ohne weiteres zu bestätigen ist (das Produkt zweier Invarianten ist wieder eine Invariante), einen Tensor $n+m$ter Stufe bilden, der das (allgemeine) *Produkt* der beiden gegebenen Tensoren heißt. Die Definition von Summe und Produkt überträgt sich in einfachster Weise auf den Fall

von mehr als zwei Summanden bzw. Faktoren. Summe und Produkt von Vektoren sind als Sonderfälle in (33) und (34) enthalten.

Man spricht von einer *Überschiebung* oder von einem *inneren Produkt* zweier Tensoren, wenn man nach (34) das Produkt bildet, dann einen Index des ersten, etwa $i$, einem Index des zweiten Tensors, etwa $r$, gleichsetzt und schließlich, entsprechend unserem Übereinkommen, über diesen doppelten Index summiert:

$$(35) \qquad A_{ijk\ldots} B_{ist\ldots} = C_{ijk\ldots ist\ldots}.$$

Im Tensor $C_{ijk\ldots rst\ldots}$ wirkt sich, wie man sieht, diese Operation so aus, daß zwei Indizes einander gleichgesetzt werden und über den so entstehenden Doppelindex summiert wird. Diese Operation heißt (auch bei beliebigen Tensoren, die nicht das Produkt von zwei anderen sind) *Verjüngung* eines Tensors.

Wir zeigen zunächst, daß durch Verjüngung eines Tensors $m$ter Stufe wieder ein Tensor, und zwar $m-2$ter Stufe entsteht. Setzen wir in (27) $l=h$, so folgt

$$\bar{A}_{hhr\ldots} = A_{ijk\ldots} a_{ih} a_{jh} a_{kr} \ldots = A_{ijk\ldots} \delta_{ij} a_{kr} \ldots = A_{iik\ldots} a_{kr} \ldots$$

oder, wenn wir $A_{iik\ldots} = B_{k\ldots}$ setzen,

$$\bar{B}_{r\ldots} = B_{k\ldots} a_{kr} \ldots$$

Das ist aber gerade das Transformationsgesetz von Tensoren; die $3^{m-2}$ Zahlen $B_{k\ldots}$, die durch Verjüngung aus den $3^m$ Komponenten des Tensors $A_{ijk\ldots}$ entstanden sind, bilden einen Tensor $m-2$ter Stufe. Genauer spricht man von einer *Verjüngung nach den Indizes $i$ und $j$.*

Daß durch die Überschiebung zweier Tensoren (genauer wieder *Überschiebung nach zwei bestimmten Indizes,* (35) ist die Überschiebung von $A_{ijk\ldots}$ und $B_{rst\ldots}$ nach den Indizes $i$ und $r$) ebenfalls immer wieder ein Tensor entsteht, ist nun leicht einzusehen. Denn die Überschiebung ist eine Verjüngung des Produktes, und da diese beiden Operationen, nämlich Multiplikation und Verjüngung an dem Tensorcharakter eines Größensystems nichts ändern, muß dasselbe von der Überschiebung gelten.

Offenbar kann man den Prozeß der Verjüngung eines Tensors so oft wiederholen, als Paare von Indizes vorhanden sind. Zum Schluß kommt man offenbar entweder zu einem Vektor oder zu einer Invariante (Tensor nullter Stufe), je nachdem die Stufenzahl $m$ des Tensors ungerade oder gerade ist. Ähnliches gilt für Überschiebungen.

Damit haben wir ein recht bequemes Verfahren zur Bildung von Invarianten gewonnen. Einige Beispiele dafür kennen wir bereits: der invariante Abstand zweier Punkte ist im wesentlichen durch die Überschiebung des durch

die beiden Punkte bestimmten Vektors mit sich selbst, der invariante Winkel zweier Richtungen durch die Überschiebung der beiden, durch die Richtungen bestimmten Einheitsvektoren gegeben.

Weitere Beispiele findet man in den beiden folgenden Paragraphen. Von Tensoren im euklidischen Raum brauchen wir im folgenden neben dem Tensor $\delta_{ik}$ nur noch einen besonderen Tensor dritter Stufe, den wir in § 5 ausführlich behandeln werden.

Wir erwähnen zum Schluß noch zwei wichtige einfache Begriffe. Ein Tensor $A_{ikl\ldots}$ heißt *symmetrisch in zwei Indizes*, z. B. in den Indizes $i$ und $k$, wenn

$$A_{ikl\ldots} = A_{kil\ldots} \tag{36}$$

ist; dagegen *schiefsymmetrisch* oder *alternierend* in den Indizes $i$ und $k$, wenn

$$A_{ikl\ldots} = -A_{kil\ldots} \tag{37}$$

ist. Aus (37) folgt unmittelbar

$$A_{iik\ldots} = 0 \qquad \text{(nicht summieren über } i\text{!)}$$

Der Maßtensor $\delta_{ik}$ ist ein Beispiel für einen symmetrischen Tensor. Der im nächsten Paragraphen zu definierende ε-Tensor ist in allen drei Indizes alternierend.

## § 5. Der ε-Tensor und das äußere Produkt von Vektoren.

Es seien ${}_{(k)}\xi_i$ $(i, k = 1, 2, 3)$ drei Einheitsvektoren, die ein rechtsorientiertes (in der Reihenfolge $k = 1, 2, 3$) normiertes Dreibein bilden. Wir betrachten die Determinanten

$$\varepsilon_{ikl} = \begin{vmatrix} {}_{(1)}\xi_i & {}_{(1)}\xi_k & {}_{(1)}\xi_l \\ {}_{(2)}\xi_i & {}_{(2)}\xi_k & {}_{(2)}\xi_l \\ {}_{(3)}\xi_i & {}_{(3)}\xi_k & {}_{(3)}\xi_l \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Offenbar erhalten wir im ganzen $3^3 = 27$ solche Determinanten, je nach der Wahl der Indizes $i, k, l$. Die 27 Zahlen $\varepsilon_{ikl}$ sind aber durchaus nicht unabhängig voneinander. Die einfachsten Determinantenregeln sagen uns, daß erstens $\varepsilon_{ikl} = 0$ ist, sobald zwei oder drei Indizes einander gleich sind (Determinante mit zwei gleichen Spalten) und zweitens bei Vertauschung von zwei Indizes $\varepsilon_{ikl}$ sein Vorzeichen ändert (Vertauschung zweier Spalten einer Determinante).

Nun wissen wir aus § 4 aber bereits, daß $\varepsilon_{123} = +1$ ist. Damit kennen wir aber schon alle 27 Zahlen $\varepsilon_{ikl}$. Es ist

$\varepsilon_{ikl} = +1$, wenn $ikl$ eine gerade Permutation von 1, 2, 3 ist,

$\varepsilon_{ikl} = 0$, wenn zwei Indizes einander gleich sind,

$\varepsilon_{ikl} = -1$, wenn $ikl$ eine ungerade Permutation von 1, 2, 3 ist.

*Diese 27 Zahlen bilden auf Grund ihrer Definition als Summe von Produkten von Vektoren einen Tensor,* den wir kurz den *$\varepsilon$-Tensor* nennen wollen.[1]) Er ist in allen Indizes alternierend und besitzt (als Folge davon) eine *zyklische Symmetrie*

$$\varepsilon_{ikl} = \varepsilon_{kli} = \varepsilon_{lik},$$

die beim Rechnen häufig Verwendung findet.

Offenbar ist es ganz gleichgültig, welches normierte rechtsorientierte Dreibein wir zur Definition der $\varepsilon_{ikl}$ verwenden; wir können insbesondere das Dreibein der Maßvektoren nehmen und erhalten

$$(2) \qquad \varepsilon_{ikl} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1k} & \delta_{1l} \\ \delta_{2i} & \delta_{2k} & \delta_{2l} \\ \delta_{3i} & \delta_{3k} & \delta_{3l} \end{vmatrix}.$$

Sind $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$ drei willkürliche Vektoren, so muß wegen des Tensorcharakters der $\varepsilon_{ikl}$ die Trilinearform

$$(3) \qquad f = \varepsilon_{ikl}\xi_i\eta_k\zeta_l$$

eine invariante, d. h. vom Koordinatensystem unabhängige Bedeutung haben. Verwenden wir für die $\varepsilon_{ikl}$ die Darstellung (2), so wird

$$(4) \qquad f = \begin{vmatrix} \delta_{1i}\xi_i & \delta_{1k}\eta_k & \delta_{1l}\zeta_l \\ \delta_{2i}\xi_i & \delta_{2k}\eta_k & \delta_{2l}\zeta_l \\ \delta_{3i}\xi_i & \delta_{3k}\eta_k & \delta_{3l}\zeta_l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix},$$

d. h. die Form (3) ist einfach die Determinante der drei Vektoren $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$ und der $\varepsilon$-Tensor das System der Koeffizienten bei der Entwicklung einer dreireihigen Determinante. Denken wir uns die drei Vektoren in einem Punkt $P$ angesetzt, so ist die Komponentendeterminante (4) nach einem bekannten Satz der analytischen Geometrie das sechsfache Volumen des durch $P$ und die Endpunkte der drei Vektoren bestimmten Tetraeders, noch mit einem von der Orientierung der drei Vektoren abhängigen Vorzeichen versehen, also jedenfalls eine Invariante. Das Vorzeichen ist dabei positiv oder negativ, je nachdem das Dreibein $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$ durch eine stetige Deformation (Verschwenkung der einzelnen Vektoren), bei der kein Vektor durch die Ebene der beiden anderen hindurchgeht, in ein rechts- oder linksorientiertes orthogonales Dreibein übergeführt werden kann. In diesem Sinn sprechen wir auch bei nicht orthogonalen Dreibeinen von *rechts-* und *linksorientiert.*

---

1) Vgl. T. Levi-Civita, *Der absolute Differentialkalkül,* (Berlin 1928), S. 77 und Band 2 dieses Lehrbuches, I, § 7 und III, § 3.

Die Überschiebung (3) von drei Vektoren mit dem ε-Tensor heißt auch *skalares Tripelprodukt.* Sein Verschwinden bedeutet, daß das von den drei Vektoren aufgespannte Tetraeder das Volumen Null hat, was nur möglich ist, wenn die drei Vektoren in einer Ebene liegen, also linear abhängig sind (§ 4). Hierin ist der Fall enthalten, daß (mindestens) einer der drei Vektoren der Nullvektor ist.

Es seien $\xi_i$ und $\eta_i$ zwei beliebige Vektoren. Da $\varepsilon_{ikl}$ ein Tensor ist, muß die Überschiebung

$$\varepsilon_{ikl}\xi_i\eta_k = \zeta_l \tag{5}$$

ein Vektor sein, den man *das äußere Produkt der beiden Vektoren* $\xi_i$ *und* $\eta_i$ *nennt.* Ist einer der beiden Vektoren $\xi_i$ und $\eta_i$ der Nullvektor, so ist ihr äußeres Produkt selbstverständlich Null. Wir nehmen nun an, daß sie unabhängig sind, und suchen vor allem Aufschluß über die Lage von $\zeta_i$. Zunächst folgt aus

$$\xi_l\zeta_l = \varepsilon_{ikl}\xi_i\eta_k\xi_l = 0, \quad \eta_l\zeta_l = \varepsilon_{ikl}\xi_i\eta_k\eta_l = 0,$$

daß $\zeta_i$ *auf den beiden Vektoren* $\xi_i$ *und* $\eta_i$ *senkrecht steht.* Wegen

$$\varepsilon_{ikl}\xi_i\eta_k\zeta_l = \zeta_l\zeta_l = \zeta^2 > 0 \tag{6}$$

Fig. 4.

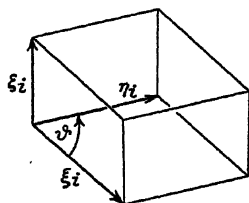
ist *das Dreibein* $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$ *rechtsorientiert* ($\zeta$ ist die Länge von $\zeta_i$, ebenso im folgenden $\xi$ und $\eta$ bzw. die Längen von $\xi_i$ und $\eta_i$). Damit kennen wir $\zeta_i$ bis auf seine Länge, die wir aber leicht aus (6) erhalten. Es ist ja $\zeta^2$ das sechsfache Tetraedervolumen oder einfacher das Volumen jenes Parallelepipeds, dessen Kanten nach Richtung und Länge mit den Vektoren $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$ übereinstimmen (Fig. 4). Da $\zeta_i$, wie gezeigt, auf $\xi_i$ und $\eta_i$ senkrecht steht, ist

$$V = \zeta^2 = \xi\eta\zeta\sin\vartheta,$$

wo $\vartheta$ der von den Vektoren $\xi_i$ und $\eta_i$ eingeschlossene Winkel $(0 < \vartheta < \pi)$ ist oder

$$\zeta = \xi\eta\sin\vartheta \tag{7}$$

die Länge von $\zeta_i$. *Das äußere Produkt zweier Vektoren ist also ein Vektor, der auf* $\xi_i$ *und* $\eta_i$ *senkrecht steht, dessen Richtung durch die Forderung bestimmt ist, daß das Dreibein* $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$ *rechtsorientiert ist, und dessen Länge durch* (7) *gegeben ist.*[1])

---

1) Es ist hier vielleicht am Platz, auf einen Umstand aufmerksam zu machen, der in Verkennung der tatsächlichen Verhältnisse zu einer Unterscheidung von polaren und achsialen Vektoren geführt hat. Läßt man nämlich auch uneigentlich orthogonale Transformationen (Umlegungen) zu, so sind die $\varepsilon_{ikl}$ nur dann ein Tensor, wenn wir die

Es gilt

(8) $$\varepsilon_{ikl}\xi_i\eta_k = -\varepsilon_{ikl}\eta_i\xi_k;$$

ferner ist $$\varepsilon_{ikl}\xi_i\eta_k = 0,$$

wenn $\xi_i$ und $\eta_i$ linear abhängig, also einer ein Vielfaches des anderen oder der Nullvektor ist.

Geht man auf die Definition (2) des $\varepsilon$-Tensors zurück, so gilt

(9) $$\varepsilon_{ikl}\xi_i\eta_k = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \delta_{1l} \\ \xi_2 & \eta_2 & \delta_{2l} \\ \xi_3 & \eta_3 & \delta_{3l} \end{vmatrix}.$$

Eine Reihe einfacher Formeln sind unmittelbare Folgerungen aus der Definition des $\varepsilon$-Tensors. Wir berechnen zunächst eine Überschiebung des $\varepsilon$-Tensors mit sich selbst (es ist $\delta_{ml}\delta_{ml} = \delta_{ll} = 3$):

$$\varepsilon_{ikl}\,\varepsilon_{hjl} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1k} & \delta_{1l} \\ \delta_{2i} & \delta_{2k} & \delta_{2l} \\ \delta_{3i} & \delta_{3k} & \delta_{3l} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \delta_{1h} & \delta_{1j} & \delta_{1l} \\ \delta_{2h} & \delta_{2j} & \delta_{2l} \\ \delta_{3h} & \delta_{3j} & \delta_{3l} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{mi}\delta_{mh} & \delta_{mi}\delta_{mj} & \delta_{mi}\delta_{ml} \\ \delta_{mk}\delta_{mh} & \delta_{mk}\delta_{mj} & \delta_{mk}\delta_{ml} \\ \delta_{ml}\delta_{mh} & \delta_{ml}\delta_{mj} & \delta_{ml}\delta_{ml} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_{ih} & \delta_{ij} & \delta_{il} \\ \delta_{kh} & \delta_{kj} & \delta_{kl} \\ \delta_{lh} & \delta_{lj} & 3 \end{vmatrix} = 3(\delta_{ih}\delta_{kj} - \delta_{ij}\delta_{kh}) - \delta_{kl}(\delta_{ih}\delta_{lj} - \delta_{ij}\delta_{lh}) + \delta_{il}(\delta_{kh}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{lh})$$
$$= 3(\delta_{ih}\delta_{kj} - \delta_{ij}\delta_{kh}) - (\delta_{ih}\delta_{kj} - \delta_{ij}\delta_{kh}) - (\delta_{ih}\delta_{kj} - \delta_{ij}\delta_{kh}),$$

also

(10) $$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{hjl} = \delta_{ih}\delta_{kj} - \delta_{ij}\delta_{kh}.$$

Daraus folgt für das innere Produkt zweier Vektoren, deren jeder ein äußeres Produkt ist (das sog. *skalare Quadrupelprodukt*)

$$\varepsilon_{ikl}\,\xi_i\eta_k\,\varepsilon_{hjl}\lambda_h\mu_j = \varepsilon_{ikl}\,\varepsilon_{hjl}\,\xi_i\eta_k\lambda_h\mu_j$$
$$= (\delta_{ih}\delta_{kj} - \delta_{ij}\delta_{kh})\,\xi_i\eta_k\lambda_h\mu_j = \xi_i\eta_k(\lambda_i\mu_k - \lambda_k\mu_i),$$

also

(11) $$\varepsilon_{ikl}\xi_i\eta_k\;\varepsilon_{hjl}\lambda_h\mu_j = \xi_i\eta_k(\lambda_i\mu_k - \lambda_k\mu_i)$$
$$= \frac{1}{2}(\xi_i\eta_k - \xi_k\eta_i)(\lambda_i\mu_k - \lambda_k\mu_i).$$

Ist insbesondere $\lambda_i = \xi_i$ und $\mu_i = \eta_i$, so folgt die Identität von Lagrange

(12) $$\varepsilon_{ikl}\xi_i\eta_k\;\varepsilon_{hjl}\xi_h\eta_j = \xi_i\xi_i\eta_k\eta_k - (\xi_i\eta_i)^2.$$

Definition (1) beibehalten, während sie ihren Tensorcharakter verlieren, wenn wir etwa die Definition (2) verwenden (es wird in diesem Fall bei einer Umlegung $\bar\varepsilon_{ikl}\bar\xi_i\bar\eta_k\bar\zeta_l = -\varepsilon_{ikl}\xi_i\eta_k\zeta_l$). In der gebräuchlichen Definition des äußeren Produktes zweier Vektoren steckt aber gerade die Definition (2) des $\varepsilon$-Tensors implizite drinnen, und so ist es nicht verwunderlich, wenn sich der Produktvektor bei Umlegungen anders verhält als ein Vektor, also gar kein Vektor ist.

Eine zweite wichtige Anwendung von (10) ist der sogenannte *Entwicklungssatz*, eine Formel für das äußere Produkt zweier Vektoren, von denen der eine selbst wieder als äußeres Produkt zweier weiterer Vektoren gegeben ist *(vektorielles Tripelprodukt)*. Es seien also $\xi_i, \eta_i$ und $\zeta_i$ gegeben und $\varepsilon_{ikl}\sigma_i\zeta_k$ zu berechnen, wobei $\sigma_i = \varepsilon_{hji}\xi_h\eta_j$ ist. Wir erhalten

$$\varepsilon_{ikl}\sigma_i\zeta_k = \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{hji}\xi_h\eta_j\zeta_k = \varepsilon_{kli}\varepsilon_{hji}\xi_h\eta_j\zeta_k = (\delta_{kh}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{lh})\,\xi_h\eta_j\zeta_k$$
$$= (\xi_k\eta_l - \xi_l\eta_k)\,\zeta_k,$$

also

$$\varepsilon_{hji}\xi_h\eta_j\varepsilon_{ikl}\zeta_k = (\xi_k\eta_l - \xi_l\eta_k)\,\zeta_k = \xi_k\zeta_k\,\eta_l - \eta_k\zeta_k\,\xi_l. \tag{13}$$

Der Vektor $\varepsilon_{ikl}\sigma_i\zeta_k$ liegt also, wie nicht anders zu erwarten, in der Ebene von $\xi_i$ und $\eta_i$. Mit Hilfe von (10) zeigt man leicht die Richtigkeit der Relation[1])

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{hjl} + \varepsilon_{khl}\varepsilon_{ijl} + \varepsilon_{hil}\varepsilon_{kjl} = 0. \tag{14}$$

Eine einfache Anwendung des Multiplikationssatzes für Determinanten bilden die Formeln

$$\varepsilon_{hij}\xi_h\eta_i\zeta_j\varepsilon_{klm}\lambda_k\mu_l\nu_m = \begin{vmatrix} \xi_i\lambda_i & \xi_i\mu_i & \xi_i\nu_i \\ \eta_i\lambda_i & \eta_i\mu_i & \eta_i\nu_i \\ \zeta_i\lambda_i & \zeta_i\mu_i & \zeta_i\nu_i \end{vmatrix} \tag{15}$$

und, als Sonderfall dieser,

$$(\varepsilon_{hij}\xi_h\eta_i\zeta_j)^2 = \begin{vmatrix} \xi_i\xi_i & \xi_i\eta_i & \xi_i\zeta_i \\ \xi_i\eta_i & \eta_i\eta_i & \eta_i\zeta_i \\ \xi_i\zeta_i & \eta_i\zeta_i & \zeta_i\zeta_i \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Eine dreireihige Determinante $A = |\,a_{ik}\,|$ läßt sich mit Hilfe des ε-Tensors in der Form

$$A = \varepsilon_{ikl}a_{1i}a_{2k}a_{3l} = \varepsilon_{ikl}a_{i1}a_{k2}a_{l3} \tag{17}$$

oder auch symmetrisch

$$A = \tfrac{1}{6}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{pqr}a_{ip}a_{kq}a_{lr} \tag{18}$$

schreiben. Offenbar ist ja die rechte Seite von (18) gleich

$$\tfrac{1}{6}\,\varepsilon_{ikl}\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \\ a_{l1} & a_{l2} & a_{l3} \end{vmatrix}.$$

---

1) Allgemein gilt: *Hat ein Tensor $A_{ihk\ldots}$ die Form*

$$A_{ihk\ldots} = B_{ihk\ldots} - B_{hki\ldots},$$

*so genügt er immer der Relation*

$$A_{ihk\ldots} + A_{hki\ldots} + A_{kih\ldots} = 0,$$

wie unmittelbar zu bestätigen ist. Der Tensor $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{hjl}$ hat diese Form, für ihn ist $B_{ihkj} = \delta_{ih}\delta_{kj}$.

Hier ist die Summe über alle Permutationen $ikl$ zu erstrecken und gibt also sechs Summanden, von denen drei den Wert $+1 \cdot +A$, drei den Wert $-1 \cdot -A$ haben; also wird der Ausdruck in der Tat gleich $\frac{1}{6} \cdot 6A = A$.

## § 6. Ergänzungen und Beispiele.

Wir wollen hier einige Sätze aus der analytischen Geometrie des euklidischen Raumes zusammenstellen, die wir im folgenden immer wieder brauchen werden. Der Leser möge sich also recht gut mit ihnen vertraut machen!

**A. Ebenen.** Die Gleichung einer Ebene, die durch einen gegebenen Punkt $\overset{0}{x}_i$ senkrecht zur Richtung des gegebenen Vektors $\xi_i$ hindurchgeht, hat in laufenden Koordinaten $x_i$ die Gleichung

$$(1) \qquad \left(x_i - \overset{0}{x}_i\right)\xi_i = 0.$$

Es ist ja $x_i - \overset{0}{x}_i$ als Differenz der Ortsvektoren zweier Punkte der Ebene ein Vektor, der in der Ebene liegen und somit auf $\xi_i$ senkrecht stehen muß und umgekehrt.

Der *Normalenvektor* $\xi_i$ unserer Ebene kann auf mehrere Arten gegeben sein, entweder direkt wie oben oder indirekt etwa dadurch, daß von der Ebene verlangt wird, sie solle (durch $\overset{0}{x}_i$ gehen und) zu den Richtungen von zwei gegebenen Vektoren $p_i$ und $q_i$ parallel sein; dann ist $\xi_i = \varepsilon_{ikl} p_k q_l$. Die Ebene kann auch durch drei Punkte $\overset{0}{x}_i, \overset{1}{x}_i, \overset{2}{x}_i$ bestimmt sein, dann kann man $p_i = \overset{1}{x}_i - \overset{0}{x}_i$ und $q_i = \overset{2}{x}_i - \overset{0}{x}_i$ setzen und erhält aus (1)

$$\varepsilon_{ikl}\left(x_i - \overset{0}{x}_i\right)\left(\overset{1}{x}_k - \overset{0}{x}_k\right)\left(\overset{2}{x}_l - \overset{0}{x}_l\right) = \begin{vmatrix} x_1 - \overset{0}{x}_1 & \overset{1}{x}_1 - \overset{0}{x}_1 & \overset{2}{x}_1 - \overset{0}{x}_1 \\ x_2 - \overset{0}{x}_2 & \overset{1}{x}_2 - \overset{0}{x}_2 & \overset{2}{x}_2 - \overset{0}{x}_2 \\ x_3 - \overset{0}{x}_3 & \overset{1}{x}_3 - \overset{0}{x}_3 & \overset{2}{x}_3 - \overset{0}{x}_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man in (1) $\overset{0}{x}_i \xi_i = k$, so erhält die Ebenengleichung die Form

$$(2) \qquad x_i \xi_i = k.$$

Ist $\xi_i$ ein Einheitsvektor, so ist $x_i \xi_i$ nach § 4 die Projektion des Ortsvektors $x_i$ *in die Normalenrichtung*, also $k$ der *Abstand* der Ebene vom Ursprung, der positiv oder negativ ausfällt, je nachdem der Ursprung auf der positiven oder negativen Seite der Ebene liegt.[1])

---

1) Die Ebene ist in diesem Falle durch den Normalenvektor $\xi_i$ orientiert; denkt man sich den Vektor $\xi_i$ in einem Punkt der Ebene angesetzt, so gilt jene Seite als positiv, auf der $\xi_i$ dann zu liegen kommt.

Ist $x_i$ der Ortsvektor eines beliebigen Punktes (der also im allgemeinen nicht auf der Ebene liegt), so ist $d = x_i \xi_i - k$ der Abstand dieses Punktes von der Ebene. Was bedeutet das Vorzeichen von $d$?

Von besonderem Interesse sind jene Ebenen des *komplexen* Raumes, die den absoluten Kegelschnitt berühren. Wir nennen diese Ebenen in Übereinstimmung mit unserer Verabredung von § 3 *isotrop*, alle anderen *euklidisch*. Einen charakteristischen Unterschied zwischen euklidischen und isotropen Ebenen können wir sofort feststellen: Während durch jeden Punkt einer euklidischen Ebene zwei isotrope Richtungen[1]) gehen, gibt es durch jeden Punkt einer isotropen Ebene nur eine einzige. Erinnern wir uns daran, daß eine Gerade (Richtung) und eine Ebene (Stellung) dann und nur dann aufeinander senkrecht stehen, wenn der uneigentliche Punkt der Richtung und die uneigentliche Gerade der Stellung Pol und Polare bezüglich des absoluten Kegelschnittes sind und daß ferner der Pol einer Tangente der Berührungspunkt ist, so folgt unmittelbar, daß der Normalenvektor einer isotropen Ebene der isotrope Vektor dieser Ebene ist.

*Es ist also*

$$\xi_i \xi_i = 0 \tag{3}$$

*die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Ebene* (2) *isotrop ist.* Daraus schließen wir, daß es im ganzen $\infty^2$ isotrope Ebenen gibt[2]), in Übereinstimmung damit, daß es $\infty^2$ Ebenen gibt, die einen Kegelschnitt beberühren. Es muß also möglich sein, eine für alle isotropen Ebenen giltige allgemeine Darstellung zu geben, bei der die Koeffizienten von zwei unabhängigen Veränderlichen (Parametern) abhängen. Aus (3) folgt $\xi_1^2 + \xi_2^2 = -\xi_3^2$ oder

$$\frac{\xi_1 + i\xi_2}{\xi_3} = \frac{-\xi_3}{\xi_1 - i\xi_2}.$$

Bezeichnen wir den gemeinsamen Wert dieser Ausdrücke mit $u$, so wird $\xi_1 + i\xi_2 = u\xi_3$ und $\xi_1 - i\xi_2 = -\frac{1}{u}\xi_3$. Ferner setzen wir $\xi_3 = u\frac{k}{v}$. Dann wird

$$\xi_1 = \frac{1}{2}(u^2 - 1)\frac{k}{v}, \quad \xi_2 = \frac{1}{2i}(u^2 + 1)\frac{k}{v}, \quad \xi_3 = u\frac{k}{v}, \tag{4}$$

und an Stelle von (2) erhalten wir

$$(u^2 - 1)x_1 - i(u^2 + 1)x_2 + 2ux_3 = 2v. \tag{5}$$

1) Das sind die Richtungen zu den Schnittpunkten der Ebene mit dem absoluten Kegelschnitt. Bei einer euklidischen Ebene sind diese beiden Punkte verschieden, während sie bei einer isotropen Ebene im Berührungspunkt zusammenfallen.

2) Weil zwischen den Koeffizienten der $\infty^3$ *beliebigen* Ebenen des Raumes die eine Relation (3) besteht. Über die Zählung der Dimensionen oder Parameter vgl. § 2, Schluß.

Geht die Ebene durch den Ursprung, so ist $v = 0$. Die Ebenen $x_1 - i x_2 = 0$ sind in (5) als Grenzfall $u \to \infty$ enthalten.

Erwähnt sei nochmals, daß alle Geraden einer isotropen Ebene auf der einen isotropen Richtung der Ebene senkrecht stehen und umgekehrt.

Der Winkel $\vartheta$ zweier Ebenen $x_i \xi_i = a$ und $x_i \eta_i = b$ stimmt mit dem Winkel ihrer Normalenvektoren überein und ist also

$$\vartheta = \arc \cos \frac{\xi_i \eta_i}{\xi \eta}; \tag{6}$$

die beiden Ebenen stehen also aufeinander senkrecht, wenn

$$\xi_i \eta_i = 0, \tag{7}$$

und sind parallel, wenn

$$\varepsilon_{ikl} \xi_i \eta_k = 0 \tag{8}$$

ist. Dabei bedeuten wie immer $\xi$ und $\eta$ bzw. die Längen von $\xi_i$ und $\eta_i$. Der Abstand zweier paralleler Ebenen $x_i \xi_i = a$ und $x_i \eta_i = b$ ist

$$d = \frac{a}{\xi} - \frac{b}{\eta}. \tag{9}$$

Eine isotrope Ebene steht nach (7) auf sich selbst senkrecht.

**B. Gerade.** Eine Gerade im Raum ist durch zwei Punkte $\overset{1}{x}_i$ und $\overset{2}{x}_i$ gegeben. Dann ist

$$x_i = \overset{1}{x}_i + t(\overset{2}{x}_i - \overset{1}{x}_i) \tag{10}$$

eine Parameterdarstellung dieser Geraden. Ihre Richtung ist durch den Vektor $p_i = \overset{2}{x}_i - \overset{1}{x}_i$ gegeben. Ist dieser ein Einheitsvektor, so bedeutet der Parameter $t$ den Abstand des Punktes $x_i$ vom Punkt $\overset{1}{x}_i$. Durch Elimination von $t$ aus (10) erhält man die *Doppelgleichung*

$$\frac{x_1 - \overset{1}{x}_1}{p_1} = \frac{x_2 - \overset{1}{x}_2}{p_2} = \frac{x_3 - \overset{1}{x}_3}{p_3}. \tag{11}$$

Überschiebt man (10) mit $\varepsilon_{ikl} p_k$, so erhält man wegen $\varepsilon_{ikl} p_i p_k = 0$ eine zweite, parameterfreie Gleichungsform

$$\varepsilon_{ikl} x_i p_k = r_l, \tag{12}$$

wo $r_l = \varepsilon_{ikl} \overset{1}{x}_i p_k$ als Drehmoment der in der Geraden wirkenden Kraft $p_i$ bezüglich des Ursprungs gedeutet werden kann. Die sechs Komponenten von $p_i$ und $r_i$ heißen die PLÜCKERschen *Koordinaten* der Geraden. Sie sind nicht unabhängig voneinander, sondern genügen der Identität $p_i r_i = 0$, ferner kann man $p_i$ stets als Einheitsvektor annehmen, so daß im ganzen vier von den

sechs Bestimmungsstücken willkürlich sind, in Übereinstimmung damit, daß es im Raum $\infty^4$ Gerade gibt.

Eine Gerade $x_i = \overset{0}{x}_i + t p_i$ des *komplexen* Raumes heißt *isotrop*, wenn der Vektor $p_i$ ein isotroper Vektor ist, also $p_i p_i = 0$ gilt. Das Quadrat des Abstandes zweier Punkte $\overset{0}{x}_i + t' p_i$ und $\overset{0}{x}_i + t'' p_i$ einer isotropen Geraden wird $(t' - t'')^2 p_i p_i = 0$. Aus diesem Grunde nennen wir die isotropen Geraden auch *ametrisch*[1]), alle anderen Geraden *euklidisch*. Durch eine euklidische Gerade gehen zwei isotrope Ebenen, durch eine ametrische bloß eine. Alle Geraden, die zu einer ametrischen Geraden $g$ senkrecht sind und mit $g$ einen Punkt gemeinsam haben, erfüllen die isotrope Ebene durch $g$. Man beachte, daß zwei Gerade dann und nur dann aufeinander senkrecht stehen, wenn ihre unendlichfernen Punkte bezüglich des absoluten Kegelschnittes konjugiert sind. Konjugiert zu einem Punkt $P$ eines Kegelschnittes sind aber alle Punkte der Tangente in $P$.

Der (kürzeste) Abstand zweier Geraden $\overset{1}{x}_i + t p_i$, $\overset{2}{x}_i + u q_i$ ist bekanntlich die Länge $d$ jenes Vektors $d_i$, der auf beiden Geraden senkrecht steht und dessen Endpunkt auf der zweiten Geraden liegt, wenn man den Anfangspunkt geeignet auf der ersten Geraden wählt. Setzen wir

$$\varepsilon_{ikl} p_k q_l = r_i, \tag{13}$$

so muß jedenfalls $d_i = \lambda r_i$ sein; den Faktor $\lambda$ bestimmen wir aus der zweiten Bedingung, nach der es zwei Werte $t$ und $u$ der Parameter geben muß, für die

$$d_i = \lambda r_i = \overset{2}{x}_i + u q_i - \overset{1}{x}_i - t p_i \tag{14}$$

ist. Da $r_i$ wegen (13) sowohl auf $p_i$ wie auch auf $q_i$ senkrecht steht, folgt daraus durch Überschiebung mit $r_i$

$$d_i r_i = \lambda r_i r_i = (\overset{2}{x}_i - \overset{1}{x}_i) r_i$$

also, wenn wir mit $r$ die Länge von $r_i$ bezeichnen,

$$\lambda = \frac{(\overset{2}{x}_i - \overset{1}{x}_i) r_i}{r^2} \tag{15}$$

und somit aus (14)

$$d_i = \frac{\left(\overset{2}{x}_k - \overset{1}{x}_k\right) r_k}{r^2} r_i \tag{16}$$

sowie

$$d = \frac{\left(\overset{2}{x}_k - \overset{1}{x}_k\right) r_k}{r}. \tag{17}$$

1) Nach einem Vorschlag von J. Lense, Jahresber. d. Deutsch. Math. Vereinig. 35 (1926), S. 280.

Überschiebt man ferner (14) mit

$$\varepsilon_{ikl} q_k r_l = \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{hjl} q_k p_h q_j = (\delta_{ih}\delta_{kj} - \delta_{ij}\delta_{kh}) q_k p_h q_j = q_k(p_i q_k - p_k q_i);$$

so erhält man für den Parameterwert $t$ des Anfangspunktes von $d_i$ auf der ersten Geraden die Gleichung

$$(\overset{2}{x}_i - \overset{1}{x}_i) q_k (p_i q_k - p_k q_i) = t p_i q_k (p_i q_k - p_k q_i),$$

also ist

$$t = -\frac{(\overset{2}{x}_i - \overset{1}{x}_i) q_k (p_i q_k - p_k q_i)}{p_i p_i q_k q_k - (p_i q_i)^2} \tag{18}$$

(der Nenner rechts ist wieder gleich $r^2$).

Aus (17) folgt, daß sich die beiden Geraden schneiden, wenn

$$(\overset{2}{x}_i - \overset{1}{x}_i) r_i = \varepsilon_{ikl} (\overset{2}{x}_i - \overset{1}{x}_i) p_k q_l = 0 \tag{19}$$

ist, und aus (13), daß sie parallel sind, wenn

$$r_i = \varepsilon_{ikl} p_k q_l = 0 \tag{20}$$

ist. Der von ihnen eingeschlossene Winkel $\vartheta$ ist

$$\vartheta = \arccos \frac{p_i q_i}{p q}. \tag{21}$$

**C. Einige Aufgaben.** 1. Der Schwerpunkt eines Dreieckes $a_i$, $b_i$, $c_i$ ist $\frac{1}{3}(a_i + b_i + c_i)$.

2. Man zeige, daß die Höhen, Seitensymmetralen und Schwerlinien eines Dreiecks sich in je einem Punkte schneiden.

3. Durch einen Punkt eine Gerade zu legen, die zwei gegebene windschiefe Gerade trifft.

4. Der Abstand zweier Geraden ist als Minimalabstand zweier Punkte (je einer auf jeder Geraden) zu bestimmen.

5. Man bestimme den Ort der Mittelpunkte einer Strecke fester Länge, deren Endpunkte auf zwei gegebenen windschiefen Geraden gleiten.

6. Es seien ${}_{(\alpha)}p_i$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) die vier von einem Punkt auf vier Ebenen gefällten Lote. Welche Beziehung besteht zwischen den ${}_{(\alpha)}p_i$, wenn die vier Ebenen durch einen Punkt gehen?

7. Man bestimme den Abstand zweier windschiefer Kanten eines regelmäßigen Oktaeders und seine Fußpunkte.

8. Die Symmetrieebenen der sechs Kanten eines Tetraeders schneiden sich in einem Punkt.

# II. Die Kurven im Raum.

## § 1. Darstellung der Raumkurven. Die Bogenlänge und der Tangentenvektor.

Es seien in einem rechtsorientierten rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem die drei Koordinaten eines Punktes $P$, d. h. der Ortsvektor von $P$, reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen $t$:

$$x_i = x_i(t). \tag{1}$$

Von den drei Funktionen $x_i(t)$ setzen wir voraus, daß sie in einem Intervall $a \leqq t \leqq b$ eindeutig definiert und in diesem Intervall $\varrho$ fach stetig differenzierbar seien, d. h. daß die Ableitungen bis einschließlich $\varrho$ ter Ordnung in diesem Intervall existieren und stetig sind. Die natürliche Zahl $\varrho \geqq 1$ ist dabei je nach der Art der gerade behandelten Aufgabe zu wählen.

Der Begriff der $\varrho$ fach stetigen Funktion ist offenbar gegenüber Bewegungen invariant; führt man durch

$$x_i = a_{ik}\bar{x}_k + b_i, \tag{2}$$

wo die $a_{ik}$ eine eigentlich orthogonale Matrix bilden, ein anderes Koordinatensystem ein, so werden die $\bar{x}_i$ dieselben Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften haben wie die $x_i$.

Die Gesamtheit aller Raumpunkte (1), die sich ergeben, wenn $t$ das Intervall $[ab]$ durchläuft[1]), heißt *Raumkurve* oder genauer Raumkurvenstück. Jedem Wert von $t$ in $[a\,b]$ entspricht eindeutig ein Punkt des Kurvenstückes und umgekehrt jedem Punkt des Kurvenstückes ein bestimmter Wert von $t$.[2]) Man kann daher $t$ als *Koordinate auf der Kurve* ansehen. Hier entsteht sofort die Frage: Was geschieht, wenn man an Stelle von $t$ einen anderen Parameter $\bar{t}$ einführt, also eine „Koordinatentransformation" $t = t(\bar{t})$ auf der Kurve vornimmt? Die Frage ist berechtigt, denn offenbar ist der Paramter in weiten Grenzen willkürlich wählbar; wir müssen nur geeignete Voraussetzungen

---

1) Wir bezeichnen das abgeschlossene Intervall $a \leqq t \leqq b$ mit $[ab]$, das offene Intervall $a < t < b$ mit $(ab)$.

2) Wir müssen, damit diese Umkehrung eindeutig ist, den Fall ausschließen, daß verschiedenen Parameterwerten aus $[ab]$ ein und derselbe Kurvenpunkt entspricht (sog. *mehrfache Punkte*).

über die Funktion $t(\bar{t})$ machen, damit nicht die Differenzierbarkeits- oder Stetigkeitseigenschaften in Verlust geraten. Wir müssen also vor allem verlangen, daß die Funktion $t(\bar{t})$ in einem Intervall $\bar{a} \leqq \bar{t} \leqq \bar{b}$ eindeutig definiert ist, wobei $a = t(\bar{a})$ und $b = t(\bar{b})$ oder $b = t(\bar{a})$ und $a = t(\bar{b})$ ist. Ferner darf die Funktion $t(\bar{t})$ in diesem Intervall keinen Wert aus $[a\,b]$ zweimal annehmen[1]), und schließlich muß sie in $[\bar{a}\,\bar{b}]$ $m$ mal stetig differenzierbar sein, wo $m \geqq \varrho$ ist. Diese Voraussetzungen laufen darauf hinaus, daß in $[a\,b]$ auch die inverse Funktion $\bar{t} = \bar{t}(t)$ existiert, eindeutig und $m$ mal stetig differenzierbar ist, so daß beide Funktionen in ihren Definitionsbereichen monotone Funktionen ihrer Argumente sind. Derartige Parametertransformationen nennen wir *zulässige Parametertransformationen* und die durch solche an Stelle von $t$ eingeführten Parameter *zulässige Parameter* (natürlich ist auch $t$ selbst ein zulässiger Parameter). Alle zulässigen Parameter und nur diese sind untereinander durchaus gleichberechtigt.[2])

Kurventheorie ist nach unseren Ausführungen in I, § 2 die Theorie der Differentialinvarianten der drei Funktionen (1) bezüglich der Gruppe der Bewegungen (2). Aber — jetzt haben wir einen wichtigen Zusatz zu machen — *unsere Differentialinvarianten müssen auch invariant sein gegenüber allen zulässigen Parametertransformationen.*[3]) Im folgenden werden wir nur solche in doppelter Hinsicht invariante Differentialausdrücke als Differentialinvarianten bezeichnen.

Es seien durch zwei Werte $t$ und $t + \Delta t$ des Parameters zwei Kurvenpunkte $x_i(t)$ und $x_i(t + \Delta t)$ gegeben. Die drei Differenzenquotienten

$$\frac{x_i(t + \Delta t) - x_i(t)}{\Delta t} \tag{3}$$

sind die Komponenten eines Vektors (vgl. I, § 4; der skalare Faktor $\frac{1}{\Delta t}$ ändert daran nichts), der die Richtung der Verbindungsgeraden der beiden Kurvenpunkte *(Sekante)* angibt, und zwar im Sinn wachsender $t$. Läßt man $\Delta t$ nach Null konvergieren, also den Punkt $x_i(t + \Delta t)$ in den Punkt $x_i(t)$ hineinrücken, so konvergieren die drei Differenzenquotienten (3) gegen die Differentialquotienten ($\varrho \geqq 1$)

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_i(t + \Delta t) - x_i(t)}{\Delta t} \tag{4}$$

---

1) Damit das in Anmerkung 2), S. 39 ausgeschlossene Vorkommnis nicht wieder zugelassen wird.

2) Unsere Definition der $\varrho$fach stetig differenzierbaren Kurve bestimmt also nicht bloß die Kurve als Punktmenge, sondern mit ihr auch das System aller zulässigen Parameter.

3) Sonst käme einem bestimmten zulässigen Parameter (oder einem Teilsystem derselben) eine besondere Rolle bezüglich der Kurve zu (sogenannte *Parameterkurve*, d. h. Kurve plus Parameter).

(Ableitungen nach $t$ bezeichnen wir im folgenden immer durch Punkte), und da die Grenzlage der Sekante als *Tangente* der Kurve im Punkt $x_i(t)$ bezeichnet wird, sind (4) die Komponenten eines Vektors, der (im Sinn wachsender $t$) die Richtung der Tangente angibt. Die Länge $\sqrt{\dot{x}_i \dot{x}_i}$ dieses Vektors ist ein einfaches Beispiel eines Ausdrucks, der gegenüber allen Bewegungen (2), aber im allgemeinen nicht gegenüber den Parametertransformationen invariant ist. Setzt man nämlich $t = t(\bar{t})$, so erhält man anstatt (4) den Vektor $\frac{d x_i}{d \bar{t}} = \frac{d x_i}{d t} \frac{d t}{d \bar{t}}$, dessen Länge das $\frac{d t}{d \bar{t}}$fache der Länge von (4) ist. Der Begriff der Kurventangente ist ein rein geometrischer; in unserer Darstellung kommt das darin zum Ausdruck, daß die Richtung des Vektors $\dot{x}_i$ bei Parametertransformationen ungeändert bleibt. Wir können ja die Richtung der Kurventangente durch einen Vektor beliebiger Länge festlegen; insbesondere können wir den Vektor $\dot{x}_i$ normieren, d. h. durch den Einheitsvektor

$$\xi_i = \frac{\dot{x}_i}{\sqrt{\dot{x}_j \dot{x}_j}} \tag{5}$$

ersetzen. Die Länge 1 dieses Vektors ist offenbar invariant, er selbst, wie man sagt, *invariant mit der Kurve verbunden.* Wir nennen ihn den *Tangentenvektor* unserer Kurve.

Zum Tangentenvektor $\xi_i$ kann man auch auf anderem Weg kommen. Die Infinitesimalrechnung zeigt, wie sich unter unseren Voraussetzungen über die Funktionen $x_i(t)$ je zwei Kurvenpunkten $x_i(t_0)$ und $x_i(t_1)$ eine Zahl

$$s(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}_i \dot{x}_i}\, dt \tag{6}$$

zuordnen läßt, die man als Länge des Kurvenstückes zwischen $t_0$ und $t_1$ bezeichnet. Der Ausdruck für $s(t_0, t_1)$ ist eine Integralinvariante des Kurvenstückes, ebenso die für alle $t$ des Intervalles $[a\, b]$ definierte Funktion

$$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}_i \dot{x}_i}\, dt \tag{7}$$

(wir schreiben der Kürze halber $s(t)$ statt $s(t_0, t)$), die als *Bogenlänge* unserer Kurve (zwischen den Punkten $t_0$ und $t$) bezeichnet wird. Das Differential

$$ds = \sqrt{\dot{x}_i \dot{x}_i}\, dt = \sqrt{d x_i\, d x_i} \tag{8}$$

heißt *Bogendifferential* oder *Bogenelement* der Kurve und gibt in erster Annäherung die Entfernung zweier nahe beieinander gelegenen Kurvenpunkte an. Je nachdem das Vorzeichen der Wurzel in (6) bis (8) positiv oder negativ ist, sind die Parameter $s$ und $t$ gleichsinnig oder gegensinnig, d. h. die Funktion $s(t)$ monoton wachsend oder monoton abnehmend.

Die Bogenlänge $s$ ist ein zulässiger Kurvenparameter; führen wir $s$ an Stelle von $t$ ein und bezeichnen wir Ableitungen nach $s$ durch Striche, so wird

$$x_i' = \dot{x}_i \frac{dt}{ds}$$

und wegen (8)

$$x_i' x_i' = \dot{x}_i \dot{x}_i \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 1, \tag{9}$$

d. h. der Vektor $x_i'$ ist ein Einheitsvektor und stimmt mit dem Tangentenvektor überein:

$$\xi_i = x_i'. \tag{10}$$

Man erkennt schon daran, wie vereinfachend die Einführung des invarianten Parameters $s$ wirkt. Wir denken uns von nun an unsere Kurve immer, wenn nicht ausdrücklich anders angegeben, auf die Bogenlänge $s$ als Parameter bezogen. Hinsichtlich der Rechnung in konkreten Fällen ist zu bemerken, daß man bei rein differentialgeometrischen Aufgaben niemals die Funktion $s(t)$ in expliziter Gestalt braucht, sondern nur ihre Ableitungen, die sich aus (8) ohne weiteres ergeben.

## § 2. Das begleitende Dreibein und die Formeln von Frenet.

Wir stellen uns die Aufgabe, zwei weitere invariant mit unserer Kurve $C$ verbundene Vektoren $\eta_i$ und $\zeta_i$ zu finden, so daß diese zusammen mit dem Tangentenvektor $\xi_i$ ein normiertes rechtsorientiertes Dreibein bilden. Ist der Tangentenvektor $\xi_i(s)$ mindestens einmal (der Ortsvektor $x_i(s)$ also mindestens zweimal) stetig differenzierbar, so folgt aus

$$\xi_i \xi_i = 1 \tag{1}$$

durch Differentiation

$$\xi_i \xi_i' = 0, \tag{2}$$

d. h. der Vektor $\xi_i'$ steht auf $\xi_i$ senkrecht (ähnliches gilt für jeden Einheitsvektor); wir brauchen ihn also nur mit einem geeigneten Normierungsfaktor, den wir mit $\frac{1}{\varkappa}$ bezeichnen wollen, zu versehen, um den ersten der gesuchten Vektoren

$$\eta_i = \frac{1}{\varkappa} \xi_i' \tag{3}$$

zu erhalten. Wegen

$$\eta_i \eta_i = 1 \tag{4}$$

und $\xi_i = x_i'$, $\xi_i' = x_i''$ ist

$$\varkappa = \sqrt{\xi_i' \xi_i'} = \sqrt{x_i'' x_i''}. \tag{5}$$

Die dadurch bis auf das Vorzeichen bestimmte stetige Funktion $\varkappa(s)$ ist selbstverständlich nach der ganzen Herleitung eine Invariante und heißt aus Gründen, auf die wir später zurückkommen, *(erste) Krümmung, Biegung* oder *Flexion* von $C$, der reziproke Wert $\varrho_1 = \frac{1}{\varkappa}$ *Radius der ersten Krümmung* oder kurz *Krümmungs-* oder *Biegungsradius* von $C$. Unsere Herleitung des Vektors $\eta_i$ versagt, wenn $\xi_i' = 0$ längs der ganzen Kurve $C$, also identisch in $s$ gilt. Dann ist aber $x_i' = a_i$ konstant und $x_i = a_i s + b_i$, die Kurve $C$ also eine Gerade. Verschwindet $\xi_i'$ nur in einzelnen Punkten, z. B. für $s = s_0$, so wird natürlich $\varkappa(s_0) = 0$ zu setzen sein; den Vektor $\eta_i$ definieren wir in diesem Punkt durch

$$\eta_i(s_0) = \lim_{s \to s_0} \eta_i(s)$$

(sofern dieser Grenzwert existiert) und erreichen dadurch, daß der Vektor $\eta_i$ längs der ganzen Kurve $C$ stetig variiert. Derartige Punkte $x_i(s_0)$ sind im allgemeinen *Wendepunkte* von $C$. Bemerkt sei, daß durch diese Festsetzung das Vorzeichen von $\varkappa$ längs der ganzen Kurve festgelegt ist, sobald wir nur in einem Punkt der Kurve darüber verfügt haben.

Der letzte gesuchte Vektor ergibt sich dann sofort als äußeres Produkt von $\xi_i$ und $\eta_i$[1])

$$\zeta_i = \varepsilon_{ikl}\xi_k\eta_l. \tag{6}$$

Für das folgende bequemer ist aber eine andere Berechnung von $\zeta_i$, die auch ziemlich analog der von $\eta_i$ ist. Ist nämlich $\eta_i$ stetig differenzierbar[2]), so folgt aus (4)

$$\eta_i\eta_i' = 0; \tag{7}$$

bedeutet $\bar{\zeta}_i$ die Projektion von $\eta_i'$ auf die zu $\xi_i$ senkrechte Ebene, so gilt nach (I, 4, 15)

$$\eta_i' = \bar{\zeta}_i + (\eta_j'\xi_j)\,\xi_i. \tag{8}$$

Den Vektor $\bar{\zeta}_i$ normieren wir mittels eines Faktors $\frac{1}{\tau}$; der sich so ergebende Einheitsvektor muß bei entsprechender Wahl des Vorzeichens von $\tau$ mit $\zeta_i$ identisch sein:

$$\zeta_i = \frac{1}{\tau}\bar{\zeta}_i. \tag{9}$$

1) Analog gilt $\xi_i = \varepsilon_{ikl}\eta_k\zeta_l, \; \eta_i = \varepsilon_{ikl}\zeta_k\xi_l.$

Man beachte die zyklische Symmetrie dieser drei Formeln!

2) Das ist sicher der Fall, wenn (§ 1) $\varrho > 2$ ist. Die Umkehrung muß nicht gelten; es kann sein, daß $x_i''$ und $\varkappa$ nicht differenzierbar sind, wohl aber der Vektor $\eta_i = \frac{1}{\varkappa} x_i''$.

Für die Invariante $\tau$, die als *zweite Krümmung*, *Windung* oder *Torsion* der Kurve bezeichnet wird, ergibt sich wegen

$$(10) \qquad \zeta_i \zeta_i = 1$$

zunächst

$$(11) \qquad \tau = \sqrt{\bar{\zeta}_i \bar{\zeta}_i}.$$

Der reziproke Wert $\varrho_2 = \frac{1}{\tau}$ heißt *Radius der zweiten Krümmung*, *Windungs-* oder *Torsionsradius*. Die Konstruktion von $\zeta_i$ versagt, wenn $\bar{\zeta}_i$ identisch verschwindet. Wegen (8) fällt dann $\eta_i'$ in die Richtung von $\xi_i$ und die beiden Vektoren $\xi_i$ und $\eta_i$ liegen für alle $s$ in ein und derselben festen Ebene, der dann natürlich auch die ganze Kurve angehören muß (vgl. auch den Beweis am Schluß dieses Paragraphen). Verschwindet $\bar{\zeta}_i$ nur in einzelnen Punkten, so kann man $\zeta_i$ (so wie früher den Vektor $\eta_i$) längs der ganzen Kurve durch die Forderung der Stetigkeit definieren, was nach (6) immer möglich ist.

Das normierte Dreibein $\xi_i$, $\eta_i$, $\zeta_i$ ist bei richtiger Wahl des Vorzeichens von $\tau$ rechtsorientiert und wird dann als *begleitendes Dreibein* unserer Kurve $C$ bezeichnet. Der Vektor $\eta_i$ heißt *Hauptnormalenvektor*, $\zeta_i$ *Binormalenvektor*. Jeder andere Vektor muß durch die drei Vektoren des begleitenden Dreibeins linear ausdrückbar sein, insbesondere muß das von den Ableitungen dieser drei Vektoren — Existenz und Stetigkeit vorausgesetzt — gelten. Diese *Ableitungsgleichungen*[1]) der Kurventheorie heißen *Frenetsche Formeln*. Eine von ihnen ergibt sich aus (3) durch Multiplikation mit $\varkappa$, die zweite ist im wesentlichen mit (8) identisch; wegen (9) und der aus der Orthogonalitätsbedingung $\xi_i \eta_i = 0$ durch Differentiation entstehenden Relation

$$(12) \qquad \xi_i \eta_i' = -\xi_i' \eta_i = -\varkappa \eta_i \eta_i = -\varkappa$$

kann man statt (8) schreiben

$$(13) \qquad \eta_i' = -\varkappa \xi_i + \tau \zeta_i.$$

Es fehlt also nur noch die Formel für $\zeta_i'$. Zunächst steht $\zeta_i'$ senkrecht auf $\zeta_i$ (das gilt ja ganz allgemein für die Ableitung *jedes* Einheitsvektors), hat also jedenfalls die Form

$$(14) \qquad \zeta_i' = A \xi_i + B \eta_i.$$

Überschiebt man einmal mit $\xi_i$, einmal mit $\eta_i$, so erhält man wegen (3) und (13) für die Koeffizienten

$$A = \xi_i \zeta_i' = -\xi_i' \zeta_i = 0, \quad B = \eta_i \zeta_i' = -\eta_i' \zeta_i = -\tau.$$

---

1) Ableitungsgleichungen sind in der Differentialgeometrie stets Formeln für die Ableitungen der Vektoren eines Dreibeins. Für den Fall einer Fläche vgl. IV, § 1 (Schluß) und V, § 4.

Die Frenetschen Formeln lauten also

$$(15)\qquad \begin{cases} \xi_i' = \qquad\quad \varkappa\eta_i \\ \eta_i' = -\varkappa\xi_i \qquad\quad +\tau\zeta_i \\ \zeta_i' = \qquad\quad -\tau\eta_i; \end{cases}$$

ihre in der allgemeinen Theorie der Raumkurven fundamentale Bedeutung werden wir im folgenden Paragraphen deutlich erkennen.

Wir haben in jedem Punkt unserer Raumkurve drei ausgezeichnete Geraden, die durch $P$ hindurchgehen und deren Richtungen durch die Vektoren des begleitenden Dreibeins gegeben sind. Wir nennen diese drei (unbegrenzten) Geraden der Reihe nach *Tangente*, *Hauptnormale* und *Binormale*. Diese drei Geraden bestimmen zu je zweien drei Ebenen, und zwar die *Normalebene* durch Haupt- und Binormale, die *rektifizierende Ebene* (über den Grund dieser Benennung vgl. § 5) durch Binormale und Tangente und schließlich als wichtigste die *Schmiegebene* durch Tangente und Hauptnormale. Die Gleichungen dieser drei Ebenen sind in laufenden Koordinaten $z_i$ der Reihe nach

$$(z_i - x_i)\,\xi_i = 0, \quad (z_i - x_i)\eta_i = 0, \quad (z_i - x_i)\,\zeta_i = 0.$$

Offenbar kann man in diesen Gleichungen an Stelle der normierten Vektoren des begleitenden Dreibeins beliebige Vektoren gleicher Richtung setzen, z. B. in der Gleichung der Schmiegebene an Stelle von $\zeta_i$ den Vektor $\varepsilon_{ikl}x_k'x_l''$, so daß die Gleichung der Schmiegebene auch

$$(16)\qquad \varepsilon_{ikl}\,(z_i - x_i)\,x_k'\,x_l'' = 0$$

oder

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} z_1 - x_1 & z_2 - x_2 & z_3 - x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix} = 0$$

geschrieben werden kann. Wir werden sofort sehen, daß diese Gleichung richtig bleibt, wenn die Kurve nicht auf die Bogenlänge als Parameter bezogen ist.

Ähnlich wie die Tangente als Grenzlage einer Geraden durch zwei Kurvenpunkte kann die Schmiegebene als Grenzlage einer Ebene durch drei Kurvenpunkte erklärt werden, wenn die drei Punkte einander unbegrenzt näherrücken. Sei die Kurve gegeben durch $x_i = x_i(t)$, wo die drei Funktionen $x_i(t)$ mindestens zweimal stetig differenzierbar sind. Die Ebene durch die Punkte mit den Parameterwerten $t$, $t+h$ und $t+k$ ist dann in laufenden Koordinaten $z_i$

$$\begin{vmatrix} z_1 - x_1(t) & z_2 - x_2(t) & z_3 - x_3(t) \\ x_1(t+h) - x_1(t) & x_2(t+h) - x_2(t) & x_3(t+h) - x_3(t) \\ x_1(t+k) - x_1(t) & x_2(t+k) - x_2(t) & x_3(t+k) - x_3(t) \end{vmatrix} = 0.$$

Formen wir die Differenzen in der zweiten und dritten Zeile mittels des Mittelwertsatzes um, so folgt

$$\begin{vmatrix} z_1 - x_1(t) & z_2 - x_2(t) & z_3 - x_3(t) \\ h\dot{x}_1(t+\vartheta h) & h\dot{x}_2(t+\vartheta h) & h\dot{x}_3(t+\vartheta h) \\ k\dot{x}_1(t+\delta k) & k\dot{x}_2(t+\delta k) & k\dot{x}_3(t+\delta k) \end{vmatrix} = 0,$$

wo die Punkte wie immer Ableitungen nach $t$ bedeuten und $0 < \vartheta < 1$, $0 < \delta < 1$ gilt. Die zweite Zeile können wir durch $h$, die dritte durch $k$ kürzen; die Glieder der dritten Zeile formen wir um:

$$\dot{x}_i(t+\delta k) = \dot{x}_i[(t+\vartheta h) + (\delta k - \vartheta h)]$$

und wenden nochmals den Mittelwertsatz an:

$$\dot{x}_i[(t+\vartheta h) + (\delta k - \vartheta h)] = \dot{x}_i(t+\vartheta h) + (\delta k - \vartheta h)\,\ddot{x}_i[(t+\vartheta h) + \Theta(\delta k - \vartheta h)],$$

wo $0 < \Theta < 1$ ist. Subtrahieren wir die zweite Zeile von der dritten, so fallen in dieser die $\dot{x}_i(t+\vartheta h)$ weg und der Faktor $(\delta k - \vartheta h)$ kann gekürzt werden. Lassen wir jetzt $h$ und $k$ irgendwie (unabhängig voneinander) nach Null konvergieren, so erhalten wir die Gleichung der Schmiegebene in der Form

$$\begin{vmatrix} z_1 - x_1 & z_2 - x_2 & z_3 - x_3 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 \\ \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 & \ddot{x}_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{18}$$

wo die Argumente bei $x_i$, $\dot{x}_i$ und $\ddot{x}_i$ weggelassen sind. Wegen

$$\dot{x}_i = x_i'\dot{s}, \quad \ddot{x}_i = x_i''\dot{s}^2 + x_i'\ddot{s} \tag{19}$$

unterscheidet sich (18) von (17) nur durch den unwesentlichen Faktor $\dot{s}^3$ und durch eine natürlich ebenfalls unwesentliche Scherung (Addition einer mit einem Faktor multiplizierten Reihe einer Determinante zu einer anderen parallelen Reihe).

Die Gleichung (18) der Schmiegebene wird dann und nur dann identisch erfüllt sein, wenn die Vektoren $\dot{x}_i$ und $\ddot{x}_i$ proportional sind. Aus $\ddot{x}_i = \alpha\dot{x}_i$ folgt aber sofort durch zweimalige Integration $x_i = A_i\tau + B_i$, wo $\tau = \int e^{\int \alpha\, dt}\, dt$ ist, also eine *Gerade*. Daß die Schmiegebenen einer Geraden unbestimmt sind, ist wohl sehr einleuchtend, wir haben aber mehr gezeigt, nämlich daß *die Geraden die einzigen Kurven mit unbestimmter Schmiegebene* sind.

Wir kommen zu einigen wichtigen Anwendungen der Frenetschen Formeln. Zunächst folgt für $\varkappa = 0$ aus der ersten Formel (15), daß $\xi_i = x_i' = \text{konst.}$, also $x_i = a_i s + b_i (a_i a_i = 1)$ ist, d. h. *die Kurven mit $\varkappa = 0$ sind Gerade*, eine Tatsache, die uns die Bezeichnung „*Krümmung*" für $\varkappa$ ganz gut gewählt erscheinen läßt.

Ist dagegen $\tau = 0$, so folgt aus der dritten Formel (15) $\zeta_i' = 0$, also $\frac{d}{ds}(\zeta_i x_i) = \zeta_i x_i' = 0$ und somit $\zeta_i x_i = c$; d. h. aber, daß alle Punkte der Kurve in der Ebene $\zeta_i x_i = c$ liegen. *Die Kurven mit $\tau = 0$ sind ebene Kurven.*

Es sei nun $\varrho \geqq 3$ (§ 1), d. h. der Ortsvektor mindestens dreimal stetig differenzierbar. Dann existieren sicher alle Vektoren des begleitenden Dreibeins samt ihren ersten Ableitungen. Wollen wir die Ableitungen des Ortsvektors $x_i(s)$ durch die Vektoren des begleitenden Dreibeins ausdrücken, so erhalten wir mittels (15)

$$(20) \qquad \begin{cases} x_i' = \xi_i \\ x_i'' = \xi_i' = \varkappa \eta_i \\ x_i''' = \varkappa \eta_i' + \varkappa' \eta_i = -\varkappa^2 \xi_i + \varkappa' \eta_i + \varkappa \tau \zeta_i. \end{cases}$$

Wir legen nun unser Koordinatensystem so, daß der Punkt $s = 0$ zum Ursprung und die drei Vektoren des begleitenden Dreibeins in diesem Punkt die Maßvektoren der Koordinatenachsen werden $(\xi_i(0) = \delta_{1i},\ \eta_i(0) = \delta_{2i},\ \zeta_i(0) = \delta_{3i})$. Für die Koordinaten eines Kurvenpunktes in der Umgebung von $s = 0$ erhalten wir dann in erster Annäherung

$$(21) \qquad \begin{cases} x_1 \doteq s, \\ x_2 \doteq \frac{\varkappa_0}{2} s^2, \\ x_3 \doteq \frac{\varkappa_0 \tau_0}{6} s^3, \end{cases}$$

wo $\varkappa_0 = \varkappa(0)$ und $\tau_0 = \tau(0)$ gesetzt ist. Gelten die Gleichungen (21) streng, so ist unsere Kurve $C$ die einfachste algebraische Raumkurve, die sog. kubische Parabel. Ihre Projektionen in die Koordinatenebenen (die Ebenen des begleitenden Dreibeins im Punkt $s = 0$) sind für $\tau_0 > 0$ schematisch in

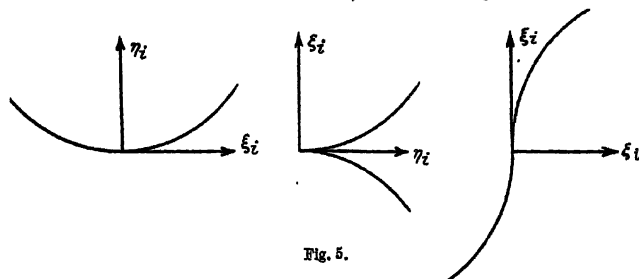



Fig. 5.

Fig. 5 wiedergegeben. Für $\tau_0 < 0$ ist die letzte Figur an einer Achse zu spiegeln. Ist unsere Kurve $C$ z. B. eine Schraubenlinie, so gelten die Gleichungen (21) und die Fig. 5 natürlich nur näherungsweise, aber wir erkennen doch, daß die Windung $\tau$ bei einer rechtsgewundenen Schraube positiv, bei einer linksgewundenen negativ sein wird (vgl. hierzu den folgenden § 3).

## § 3. Krümmung und Windung. Die natürlichen Gleichungen einer Kurve.

Denken wir uns im Ursprung unseres Koordinatensystems drei Einheitsvektoren angesetzt, die zu den Vektoren des begleitenden Dreibeins einer Kurve $C$ jeweils parallel sind, so beschreiben diese drei Vektoren drei Kurven, die alle auf der Einheitskugel mit dem Mittelpunkt im Ursprung liegen, nämlich das *Tangentenbild* $C_1$

$$x_i = \xi_i(s), \tag{1}$$

das *Hauptnormalenbild* $C_2$

$$x_i = \eta_i(s) \tag{2}$$

und schließlich das *Binormalenbild* $C_3$

$$x_i = \zeta_i(s) \tag{3}$$

der gegebenen Raumkurve $C$. Seien $s_1$, $s_2$ und $s_3$ der Reihe nach die von irgendwelchen Anfangspunkten (z. B. alle von $s = 0$ aus) gemessenen Bogenlängen dieser drei Kurven. *Dann ist die Krümmung $\varkappa$ von $C$ der Grenzwert des Verhältnisses der Bogenlängen entsprechender Stücke von $C_1$ und $C$ und die Torsion $\tau$ von $C$ der Grenzwert des Verhältnisses der Bogenlängen entsprechender Stücke von $C_3$ und $C$, d. h. es gilt*

$$\varkappa = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s_1}{\Delta s} = \frac{d s_1}{d s}, \quad \tau = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s_3}{\Delta s} = \frac{d s_3}{d s}. \tag{4}$$

Man überzeugt sich leicht, daß die so definierten Funktionen $\varkappa(s)$ und $\tau(s)$ mit den Invarianten der Frenetschen Formeln (2, 15) übereinstimmen. Es ist ja nach (2, 15)

$$d s_1 = \sqrt{\xi_i' \xi_i'}\, d s = \varkappa \sqrt{\eta_i \eta_i}\, d s = \varkappa\, d s$$

und

$$d s_3 = \sqrt{\zeta_i' \zeta_i'}\, d s = \tau \sqrt{\eta_i \eta_i}\, d s = \tau\, d s.$$

Für das Bogenelement des Hauptnormalenbildes gilt dagegen

$$d s_2 = \sqrt{\eta_i' \eta_i'}\, d s = \sqrt{\varkappa^2 + \tau^2}\, d s$$

oder

$$d s_2^2 = d s_1^2 + d s_3^2, \tag{5}$$

die sog. *Lancretsche Gleichung.*

Wir suchen nun noch eine für die Rechnung bequeme Formel für die Windung. Aus der zweiten Frenetformel (2, 15) folgt durch Überschiebung mit $\zeta_i$

$$\tau = \eta_i' \zeta_i;$$

wegen (2, 20)

$$x_i''' = \varkappa \eta_i' + \varkappa' \eta_i$$

ist

$$\zeta_i x_i''' = \varkappa \eta_i' \zeta_i = \varkappa \tau;$$

andrerseits gilt nach (2, 6) und (2, 20)

$$\zeta_l = \varepsilon_{ikl}\xi_i\eta_k = \frac{1}{\varkappa}\varepsilon_{ikl}x_i'x_k'',$$

so daß schließlich

(6) $$\tau = \frac{1}{\varkappa^2}\varepsilon_{ikl}x_i'x_k''x_l'''$$

oder wegen (2, 5)

(7) $$\tau = \frac{\varepsilon_{ikl}x_i'x_k''x_l'''}{x_j''x_j''}$$

folgt. Ist unsere Kurve nicht auf die Bogenlänge $s$, sondern auf einen beliebigen zulässigen Parameter $t$ bezogen, so folgt aus (2, 19)

$$x_i'' = \frac{1}{\dot{s}^2}(\ddot{x}_i - x_i'\ddot{s}) = \frac{1}{\dot{s}^3}(\ddot{x}_i\dot{s} - \dot{x}_i\ddot{s}),$$

also $$x_i''x_i'' = \frac{1}{\dot{s}^6}\left[(\ddot{x}_i\ddot{x}_i)\dot{s}^2 - 2(\dot{x}_i\ddot{x}_i)\dot{s}\ddot{s} + (\dot{x}_i\dot{x}_i)\ddot{s}^2\right].$$

Nun ist $\dot{s}^2 = \dot{x}_i\dot{x}_i$; durch Differentiation folgt daraus $\dot{s}\ddot{s} = \dot{x}_i\ddot{x}_i$, so daß $\dot{x}_i\dot{x}_i\ddot{s}^2 = \dot{s}^2\ddot{s}^2 = (\dot{x}_i\ddot{x}_i)^2$ wird. Aus (2, 5) folgt also

(8) $$\varkappa = \frac{1}{\dot{s}^3}\sqrt{(\ddot{x}_i\ddot{x}_i)(\dot{x}_i\dot{x}_i) - (\dot{x}_i\ddot{x}_i)^2}.$$

Um noch die entsprechende Formel für $\tau$ zu erhalten, differenzieren wir die zweite Gleichung (2, 19) nochmals nach $t$ und erhalten

(9) $$\dddot{x}_i = x_i'''\dot{s}^3 + 3x_i''\dot{s}\ddot{s} + x_i'\dddot{s}$$

und

(10) $$\varepsilon_{ikl}\dot{x}_i\ddot{x}_k\dddot{x}_l = \dot{s}^6\varepsilon_{ikl}x_i'x_k''x_l''',$$

also ist wegen (7)

(11) $$\tau = \frac{\varepsilon_{ikl}\dot{x}_i\ddot{x}_k\dddot{x}_l}{(\ddot{x}_i\ddot{x}_i)(\dot{x}_i\dot{x}_i) - (\dot{x}_i\ddot{x}_i)^2}.$$

Berechnen wir als Beispiel Krümmung und Windung der gemeinen Schraubenlinie $(a > 0)$

$$x_1 = a\cos t,\quad x_2 = a\sin t,\quad x_3 = bt,$$

so liefern die Formeln (8) und (11) nach einfacher Rechnung

$$\varkappa = \frac{a}{a^2+b^2},\qquad \tau = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Das Vorzeichen von $\tau$ stimmt mit dem Vorzeichen von $b$ überein; in Übereinstimmung mit der Bemerkung am Schluß von § 2 ist die Schraube rechts- oder linksgewunden, je nachdem $b$ und damit $\tau$ positiv oder negativ ist. (Für $\tau = 0$ wird aus der Schraube der Kreis $x_1^2 + x_2^2 = a^2$, $x_3 = 0$.)

Bei ebenen Kurven ($x_3 = 0$ bei geeigneter Koordinatenwahl) ist natürlich stets $\tau = 0$ (§ 2). Für $\varkappa$ ergibt sich aus (8) die bekannte Formel für die Krümmung, bis auf das Vorzeichen, das ja bei orientierten ebenen Kurven eine ähnliche Rolle spielt wie das Vorzeichen der Windung bei den Raumkurven. Das Vorzeichen der Krümmung in einem Punkt $P$ einer ebenen Kurve charakterisiert bekanntlich den Drehungssinn des (aus Tangente und Normale bestehenden) begleitenden Zweibeins beim Durchgang durch den Punkt $P$ im positiven Durchlaufungssinn. Im Gegensatz dazu ist die Charakterisierung des Schraubungssinnes des begleitenden Dreibeins einer Raumkurve durch das Vorzeichen der Windung durchaus unabhängig von der Orientierung der Kurve.

Krümmung und Windung sind, wie wir bereits in § 2 festgestellt haben, (absolute) Differentialinvarianten einer Raumkurve. Aber es gilt noch mehr: *Sie bilden zusammen mit der Bogenlänge s ein vollständiges System von Invarianten.* Damit ist gemeint, daß alle anderen Differentialinvarianten Funktionen von $s$, $\varkappa$ und $\tau$ und ihren Ableitungen sind. Dann muß aber offenbar auch umgekehrt durch Angabe zweier Funktionen $\varkappa(s)$ und $\tau(s)$ wenigstens unter gewissen Voraussetzungen über Stetigkeit usw. eine Raumkurve eindeutig bestimmt sein, selbstverständlich bis auf ihre Lage im Raum, die ja durch Krümmung und Windung allein, ohne daß von irgendeinem Koordinatensystem die Rede ist, auch gar nicht festgelegt sein kann. Gerade wegen dieser Unabhängigkeit von jedem Koordinatensystem nennt man die drei Größen $\varkappa$, $\tau$ und $s$ die *natürlichen Koordinaten* und zwei Gleichungen zwischen $\varkappa$, $\tau$ und $s$, am einfachsten die Gleichungen

$$\varkappa = \varkappa(s), \quad \tau = \tau(s), \tag{12}$$

die Krümmung und Windung durch gegebene Funktionen von $s$ definieren, *natürliche Gleichungen* der Raumkurve.

Zum Nachweis unserer Behauptung gehen wir von den FRENETschen Formeln (2, 15) aus. Diese bilden ein System von Differentialgleichungen für die Komponenten der Vektoren des begleitenden Dreibeins, das von der Form

$$\left\{\begin{array}{l} \xi' = \qquad\quad \varkappa\eta \\ \eta' = -\varkappa\xi \qquad\quad + \tau\zeta \\ \zeta' = \qquad\quad -\tau\eta \end{array}\right. \tag{13}$$

ist und nach bekannten Sätzen aus der Theorie der Differentialgleichungen unter der alleinigen Voraussetzung, daß $\varkappa$ und $\tau$ stetige Funktionen der unabhängigen Veränderlichen $s$ sind, zu jedem System von Anfangswerten eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt. Sind $\xi, \eta, \zeta$ und $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ zwei beliebige,

verschiedene oder identische Lösungen von (13), so gilt, wie man wegen (13) unmittelbar zeigen kann,

$$\frac{d}{ds}(\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta} + \zeta\bar{\zeta}) = 0, \tag{14}$$

d. h. der Ausdruck $\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta} + \zeta\bar{\zeta}$ ist von $s$ unabhängig. Es seien $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$ drei Systeme von Lösungen, die für $s = 0$ bzw. zu den Anfangswerten (1, 0, 0), (0, 1, 0) und (0, 0, 1) gehören. Die drei Vektoren $\xi_i$, $\eta_i$ und $\zeta_i$ bilden dann wegen (14) für alle Werte von $s$ ein rechtsorientiertes normiertes Dreibein.[1]) Die Raumkurve, die durch den Ursprung des Koordinatensystems geht, deren begleitendes Dreibein dort durch die Maßvektoren gebildet wird und deren Ortsvektor durch

$$x_i(s) = \int_0^s \xi_i(s)\,ds \tag{15}$$

gegeben ist, ist dann die einzige Kurve, die den obigen Anfangsbedingungen genügt und deren Krümmung und Windung die gegebenen Funktionen $\varkappa(s)$ und $\tau(s)$ sind.

Nach einer Bemerkung von DARBOUX lassen sich Lösungen des Systems (13), die der (in unserem Fall notwendigen) Bedingung

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

genügen, durch Integration einer einzigen RICATTIschen Differentialgleichung gewinnen. Setzt man nämlich

$$z = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta} = \frac{1 + \zeta}{\xi - i\eta},$$

so folgt nach einiger Rechnung, daß diese komplexe Funktion wegen (13) der Differentialgleichung

$$z' = \frac{i\tau}{2}(z^2 - 1) - i\varkappa z \tag{16}$$

genügt, die offenbar vom RICATTIschen Typus ist, und im Fall einer ebenen Kurve ($\tau = 0$) durch eine Quadratur gelöst werden kann. Durch Trennung von Reellem und Imaginärem kommt man von (16) wieder zu dem System (13) zurück.

---

1) Die Bedingung (14) liefert nicht die Orthogonalitätsbedingung direkt; sie besagt, daß das innere Produkt der $\alpha$ten und $\beta$ten Spalte ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{matrix} \right\|$$

den Wert $\delta_{\alpha\beta}$ hat, während die Orthogonalitätsbedingung dieselbe Aussage für die *Zeilen* darstellt. Nach I, § 4 folgt aber die eine Bedingung aus der anderen.

Wir wollen als Beispiel die Bestimmung der ebenen Kurven nach dieser Methode ausführen. Es sei also $\tau = 0$, $\varkappa = \varkappa(s)$ gegeben. Als Anfangswerte (für $s = 0$) nehmen wir die schon oben erwähnten $\xi_i(0) = \delta_{1i}, \eta_i(0) = \delta_{2i}$, $\zeta_i(0) = \delta_{3i}$ und $x_i(0) = 0$ und setzen zur Abkürzung $f = \int_0^s \varkappa(s)\, ds$. Die Differentialgleichung (16) wird zu

$$z' = -i\varkappa z, \tag{17}$$

so daß wir

$$z = Ce^{-i(f+a)} = C[\cos(f+a) - i\sin(f+a)] \tag{18}$$

mit den reellen Integrationskonstanten $a$ und $C$ als allgemeine Lösung nehmen können. Es folgt

$$\begin{aligned} \xi + i\eta &= (1-\zeta)\, C[\cos(f+a) - i\sin(f+a)] \\ \xi - i\eta &= (1+\zeta)\frac{1}{C}[\cos(f+a) + i\sin(f+a)]. \end{aligned} \tag{19}$$

Trennen wir hier Reelles und Imaginäres, so folgt, wenn noch

$$\frac{C^2-1}{C^2+1} = b$$

gesetzt wird, ohne Schwierigkeit

$$\xi = \sqrt{1-b^2}\cos(f+a), \quad \eta = -\sqrt{1-b^2}\sin(f+a), \quad \zeta = b. \tag{20}$$

Aus den obigen Anfangsbedingungen ergeben sich für $i = 1, 2, 3$ drei Lösungen, für $i = 1$ $(a = b = 0)$

$$\xi_1 = \cos f, \quad \eta_1 = -\sin f, \quad \zeta_1 = 0,$$

für $i = 2$ $(a = -\frac{\pi}{2}, b = 0)$

$$\xi_2 = \sin f, \quad \eta_2 = \cos f, \quad \zeta_2 = 0$$

und für $i = 3$ ($a$ beliebig, $b = 1$)

$$\xi_3 = 0, \quad \eta_3 = 0, \quad \zeta_3 = 1.$$

Somit ist

$$x_1 = \int_0^s \cos f\, ds, \quad x_2 = \int_0^s \sin f\, ds, \quad x_3 = 0.$$

## § 4. Berührung höherer Ordnung. Der Krümmungskreis und die Schmiegkugel.

Mit der Definition der beiden Invarianten $\varkappa(s)$ und $\tau(s)$ und der Aufstellung der FRENETschen Formeln ist die Theorie der reellen Kurven im wesentlichen fertig. Es gibt jedoch noch einige weitere mit der Kurve invariant verbundene Gebilde, die ein gewisses Interesse beanspruchen und die wir noch behandeln wollen. Zunächst definieren wir:

*Zwei Kurven* $x_i = \varphi_i(t)$ *und* $x_i = \psi_i(u)$

*berühren einander in einem Punkt von k ter Ordnung, wenn es einen Parameterwert* $t_0$ *und eine mindestens kmal stetig differenzierbare Funktion* $u = u(t)$ *mit* $u'(t_0) \neq 0$ *gibt, so daß die Funktionen* $\varphi_i(t)$, $\psi_i(u)$ *und somit auch die Funktionen* $\chi_i(t) = \psi_i(u(t))$ *an der Stelle* $t_0$ *mindestens k mal stetig differenzierbar sind und wenn*

$$\varphi_i^{(\alpha)}(t_0) = \chi_i^{(\alpha)}(t_0) \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, k) \tag{1}$$

*gilt. Existieren auch die* $k+1$ *ten Ableitungen, so muß außerdem*

$$\varphi_i^{(k+1)}(t_0) \neq \chi_i^{(k+1)}(t_0)$$

*sein, wie immer auch die den Bedingungen* (1) *genügende, mindestens* $k+1$ *mal stetig differenzierbare Funktion* $u(t)$ *gewählt wird.* Von nullter Ordnung berühren heißt offenbar schneiden; berühren sich zwei Kurven in einem Punkt von erster Ordnung, so haben sie dort eine gemeinsame Tangente. Statt von einer Berührung $k$ter Ordnung spricht man auch von einer $k+1$ *punktigen Berührung.*[1]) Über die Funktion $u(t)$ kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit besondere Annahmen machen. Die Gleichungen (1) enthalten ja bloß Bedingungen für die Werte dieser Funktion und ihrer ersten $k$ Ableitungen im Punkt $t_0$; setzen wir also $u^{(\alpha)}(t_0) = c_\alpha$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, k)$, so können wir ohne weiteres

$$u = c_0 + \frac{c_1}{1!}(t - t_0) + \frac{c_2}{2!}(t - t_0)^2 + \cdots + \frac{c_k}{k!}(t - t_0)^k$$

wählen. Die Gleichungen (1) sind dann $3(k+1)$ numerische Bedingungen für die $k+1$ Konstanten $c_\alpha$.

*Eine Fläche*

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{2}$$

*und eine Kurve*

$$x_i = \varphi_i(t) \tag{3}$$

*berühren einander in einem Punkt von k ter Ordnung, wenn sich auf der Fläche zwar eine Kurve ziehen läßt, die die Kurve* (3) *von k ter Ordnung berührt, aber keine Kurve, die* (3) *von höherer als k ter Ordnung berührt. Notwendig und hinreichend dafür ist, daß es einen Parameterwert* $t_0$ *gibt, so daß die Funktionen* $\varphi_i(t)$ *an der Stelle* $t_0$ *und die Funktion* $f(x_1, x_2, x_3)$ *an der Stelle* $\overset{0}{x}_i = \varphi_i(t_0)$

1) Entsprechend der Vorstellung, daß in einem solchen Berührungspunkt $k+1$ Schnittpunkte der beiden Kurven zusammenfallen.

*mindestens $k$ mal stetig differenzierbar sind und daß die zusammengesetzte Funktion*

(4) $$G(t) = f(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \varphi_3(t))$$

*den $k+1$ Bedingungen*

(5) $$G^{(\alpha)}(t_0) = 0 \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, k)$$

*genügt. Existieren auch die $k+1$ten Ableitungen, so muß außerdem*

$$G^{(k+1)}(t_0) \neq 0$$

*sein.*[1]) Wir stellen zunächst fest, daß wir die Kurve auf der Fläche, die (3) von $k$ter Ordnung berühren soll, gleich auf den oben definierten, bei $k$facher Berührung sicher existierenden Parameter $t$ beziehen, also

$$x_i = \psi_i(t)$$

setzen können, wo die Funktionen $\psi_i(t)$ mindestens $k$ mal stetig differenzierbar sind. Liegt diese Kurve auf der Fläche (2), so gelten identisch in $t$ die Gleichungen

(6) $$\begin{cases} f(\psi_1(t),\ \psi_2(t),\ \psi_3(t)) = 0, \\ \dfrac{df}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\psi_i' = 0, \\ \dfrac{d^2 f}{dt^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\psi_i'\psi_k' + \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\psi_i'' = 0 \end{cases}$$

usw. bis einschließlich zur $k$ten Ableitung (mindestens). Außer diesen Identitäten müssen die Funktionen $\psi_i$ auch den $k+1$ numerischen Bedingungen

(7) $$\psi_i^{(\alpha)}(t_0) = \varphi_i^{(\alpha)}(t_0) \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, k),$$

sowie eventuell der Ungleichung

$$\psi_i^{(k+1)}(t_0) \neq \varphi_i^{(k+1)}(t_0)$$

genügen. Eliminiert man die $\psi_i^{(\alpha)}(t_0)$ mittels (7) aus den für die Stelle $t_0$ angeschriebenen Gleichungen (6), so kommt man gerade zu den oben angegebenen Bedingungen (5). Es ist somit unmittelbar einzusehen, daß diese Bedingungen notwendig, also im Fall einer Berührung $k$ter Ordnung stets erfüllt sind. Daß sie auch hinreichend sind, ist ebenfalls unschwer einzusehen. Ist nämlich etwa $\frac{\partial f}{\partial x_3} \neq 0$, so ist durch (2) $x_3$ als Funktion

(8) $$x_3 = x_3(x_1, x_2)$$

---

1) Wir wollen dabei ausdrücklich annehmen, daß der Punkt $\overset{0}{x}_i$ kein singulärer Punkt der Fläche (2) sei, d. h. daß in $\overset{0}{x}_i$ nicht alle drei Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ zugleich verschwinden.

von $x_1$ und $x_2$ bestimmt; wegen (5) genügen die $\varphi_i^{(\alpha)}(t_0)$ auch der Gleichung (8) und den sich daraus durch $k$malige Differentiation ergebenden weiteren Gleichungen. Wählt man also zunächst die Funktionen $\psi_1(t)$ und $\psi_2(t)$ so, daß die Bedingungen (7) für $i = 1, 2$ erfüllt sind, also z. B. $\psi_1 = \varphi_1$, $\psi_2 = \varphi_2$, so ist wegen (8) die Funktion $\psi_3(t) = x_3(\psi_1(t), \psi_2(t))$ bestimmt, und zwar so, daß sie den Bedingungen (7) für $i = 3$ genügt.

Wir betrachten insbesondere den Fall, wo die Funktion $f(x_1, x_2, x_3)$ in (2) noch von $p$ willkürlichen Parametern $z_1, \ldots, z_p$ abhängt, die Gleichung (2) also eine Schar von $\infty^p$ Flächen *($p$parametrige Flächenschar)* darstellt. Dann gibt es im allgemeinen eine einzige Fläche der Schar, die eine Kurve (3) in einem gegebenen Punkt $t_0$ gerade von $p-1$ter Ordnung berührt.[1]) Diese Fläche heißt die die Kurve *oskulierende* Fläche der Schar. Ist die Berührung von höherer als $p-1$ter Ordnung, so spricht man von einer *Superoskulation.*[2]) In diesem Sinn nennt man die Schmiegebene auch *oskulierende Ebene*; Superoskulation tritt offenbar in jenen Punkten ein, in denen die Windung $\tau = 0$ ist.

Die Gesamtheit aller Kugeln

$$(x_i - z_i)(x_i - z_i) = z_4^2, \tag{9}$$

wo die Koordinaten $z_1, z_2, z_3$ des Mittelpunktes und der Radius $z_4$ willkürliche Parameter sind, bildet eine vierparametrige Flächenschar. Es wird also in jedem Punkt einer Raumkurve

$$x_i = x_i(s), \tag{10}$$

die wir uns wieder auf die Bogenlänge $s$ bezogen denken, eine vierpunktig berührende Kugel geben, die *Schmiegkugel,* wenn die Funktionen $x_i(s)$ mindestens dreimal stetig differenzierbar sind. Wir haben (10) in (9) einzusetzen und dreimal zu differenzieren. Das gibt wegen der FRENETschen Formeln (2, 15) der Reihe nach die Gleichungen (die $x_i$ sind dabei die durch (10) gegebenen Funktionen von $s$)

$$(x_i - z_i)(x_i - z_i) - z_4^2 = 0, \tag{11}$$

$$(x_i - z_i)\xi_i = 0, \tag{12}$$

$$\varkappa(x_i - z_i)\eta_i + 1 = 0, \quad (\xi_i\xi_i = 1) \tag{13}$$

und schließlich

$$(x_i - z_i)(-\varkappa^2\xi_i + \varkappa'\eta_i + \varkappa\tau\zeta_i) = 0. \tag{14}$$

---

1) Eine Berührung $p-1$ter Ordnung gibt nach (5) gerade $p$ Gleichungen für die $p$ Parameter $z_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, p)$.

2) Im Punkt $t_0$ sind dann die Gleichungen (5) erfüllt für $k \geqq p$.

Die Gleichung (12) sagt aus, daß der Mittelpunkt der Schmiegkugel in der Normalebene liegt, so daß sein Ortsvektor von der Form

$$z_i = x_i + a\eta_i + b\zeta_i \tag{15}$$

ist; aus (13) oder

$$(z_i - x_i)\eta_i = \varrho_1, \tag{16}$$

wo $\varrho_1 = \frac{1}{\varkappa}$ der Krümmungsradius ist, folgt, wenn wir (15) einsetzen, daß $a = \varrho_1$ die Projektion von $z_i - x_i$ in die Richtung der Hauptnormalen ist. Sehen wir zunächst von der letzten Bedingungsgleichung (14) ganz ab, so gilt also: Es gibt in jedem Punkt einer Kurve (10) unendlich viele dreipunktig berührende Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer zur Binormalen parallelen Geraden, der sog. *Krümmungsachse* liegen. Die Krümmungsachse schneidet die Schmiegebene in einem Punkt, der auf der positiven Seite der Hauptnormalen im Abstand $\varrho_1$ vom Berührungspunkt liegt und als *Krümmungsmittelpunkt* bezeichnet wird. Die sämtlichen dreipunktig berührenden Kugeln schneiden die Schmiegebene also in einem einzigen, die Kurve (10) dreipunktig berührenden Kreis vom Radius $\varrho_1$, dem *Krümmungskreis*. Nehmen wir nun noch die vierte Bedingungsgleichung (14) hinzu, so folgt durch Einsetzen von (15), daß $b = -\frac{\varkappa'}{\varkappa^2\tau}$ ist. Somit ist

$$z_i = x_i + \frac{1}{\varkappa}\eta_i - \frac{\varkappa'}{\varkappa^2\tau}\zeta_i = x_i + \varrho_1\eta_i + \varrho_1'\varrho_2\zeta_i \tag{17}$$

der Ortsvektor des Mittelpunktes der Schmiegkugel und

$$R^2 = \frac{1}{\varkappa^2} + \frac{\varkappa'^2}{\varkappa^4\tau^2} = \varrho_1^2 + \varrho_1'^2\varrho_2^2$$

das Quadrat ihres Radius.

Aus (17) folgt — Existenz der Ableitungen vorausgesetzt — durch Differentiation unter Benützung von (2, 15)

$$z_i' = \left(\frac{\tau}{\varkappa} - \frac{d}{ds}\frac{\varkappa'}{\varkappa^2\tau}\right)\zeta_i. \tag{18}$$

Ist

$$\frac{\tau}{\varkappa} - \frac{d}{ds}\frac{\varkappa'}{\varkappa^2\tau} = 0, \tag{19}$$

so ist $z_i$ und wegen

$$\frac{dR^2}{ds} = -\frac{2\varkappa'}{\varkappa^3} + 2\frac{\varkappa'}{\varkappa^2\tau}\frac{d}{ds}\frac{\varkappa'}{\varkappa^2\tau} = -\frac{2\varkappa'}{\varkappa^2\tau}\left(\frac{\tau}{\varkappa} - \frac{d}{ds}\frac{\varkappa'}{\varkappa^2\tau}\right) = 0$$

auch $R^2$ konstant, d. h. zu allen Punkten der Kurve (10) gehört dieselbe Schmiegkugel oder mit anderen Worten, die ganze Kurve muß auf einer Kugel liegen, eine sog. *sphärische Kurve* sein. Diese charakteristische Eigenschaft ist allein durch eine Beziehung zwischen unseren beiden Invarianten $\varkappa$ und $\tau$ gegeben.

## § 5. Raumkurven und Torsen.

Bekanntlich läßt sich neben jeden Satz der projektiven Geometrie durchaus gleichberechtigt ein zweiter stellen, in dem die Worte Punkt und Ebenen, verbinden und schneiden vertauscht sind (von den sonstigen grammatikalischen Änderungen, die dadurch nötig werden, sehen wir ab). Die Tatsache bezeichnet man als das *Dualitätsgesetz* der projektiven Geometrie.

Wenn wir nun hier auch ausschließlich metrische Geometrie treiben und in der metrischen Geometrie das Dualitätsgesetz nur mit Einschränkungen gilt, da das absolute Gebilde (vgl. I, § 3) nicht zu sich selbst dual ist, so haben doch einige der von uns eingeführten Begriffe rein projektiven Charakter, und wir werden durch ihre Dualisierung jedenfalls zu neuen Begriffen kommen.

Beginnen wir zunächst mit unserer Raumkurve

$$x_i = x_i(t) \tag{1}$$

selbst. Wir wollen dabei jetzt annehmen, daß die drei Funktionen $x_i(t)$ in einem Intervall zweimal stetig differenzierbar sind (d. h. daß die in § 1 eingeführte Zahl $\varrho \geqq 2$ ist). Die Tatsache, daß zu jedem Wert des *einen* Parameters $t$ ein Punkt des Raumes gehört, wird in der projektiven Geometrie durch die Redeweise ausgedrückt: „Die Kurve (1) besteht aus $\infty^1$ Punkten.“ Dual dazu wäre ein Gebilde, das aus $\infty^1$ Ebenen besteht und das man als *Ebenenschar* zu bezeichnen pflegt. Eine derartige Schar von $\infty^1$ Ebenen können wir analytisch darstellen, wenn wir annehmen, daß in der allgemeinen Ebenengleichung

$$(x_i - a_i)\lambda_i = 0 \tag{2}$$

die $a_i$ und die Komponenten $\lambda_i$ des Normalenvektors Funktionen eines Parameters $u$ sind. (2) ist dann die Gleichung einer *einparametrigen Ebenenschar*.[1]) Von den Funktionen $a_i(u)$ und $\lambda_i(u)$ setzen wir ebenfalls voraus, daß sie zweimal stetig differenzierbar sind.

Das erste zu einer Raumkurve gehörige Gebilde, das wir einführten, war die Tangente als Grenzlage einer Sekante. Der Begriff der Tangente ist offenbar ein Begriff der projektiven Geometrie und kann somit dualisiert werden. Wir setzen zur Abkürzung

$$(x_i - a_i(u))\,\lambda_i(u) = f(u). \tag{3}$$

Dann ist

$$f(u) = 0 \tag{4}$$

---

1) Es handelt sich hier also um einen Sonderfall der in § 4 betrachteten $p$ parametrigen Flächenschar.

bei festem $u$ die Gleichung einer Ebene der Schar (2). Eine zweite Ebene ist dann etwa durch

$$f(u+h)=0 \tag{5}$$

mit $h \neq 0$ gegeben. Nun ist

$$f(u+h)=f(u)+hf'(u+\vartheta h), \quad 0<\vartheta<1. \tag{6}$$

Dual zur Sekante der Kurve (1) ist hier offenbar die Schnittgerade der beiden Ebenen (4) und (5); gelten diese beiden Gleichungen aber gleichzeitig, so kann man (5) wegen (6) und (4) ersetzen durch

$$f'(u+\vartheta h)=0. \tag{7}$$

Geht man zur Grenze $h \to 0$ über, so wird aus (7)

$$f'(u)=0. \tag{8}$$

Die Gleichungen (4) und (8) stellen somit die zur Tangente einer Raumkurve duale, mit der Ebenenschar (2) verbundene Gerade dar. So wie zu jedem Wert des Parameters $t$ eine Tangente der Kurve (1) gehört, so gehört hier zu jedem Wert des Parameters $u$ eine Gerade.

Ist der Tangentenvektor der Kurve (1) stetig, und das ist wegen $\varrho \geqq 2$ sicher der Fall, so ist der Ort sämtlicher Tangenten eine geradlinige Fläche, die als *Tangentenfläche* der Raumkurve (1) bezeichnet wird. Die Tangenten heißen *Erzeugende* der Tangentenfläche. Ebenso werden die Geraden (4), (8) die Erzeugenden einer Fläche sein, die man die *Hüllfläche* der Ebenenschar (2) nennt, deren einzelne Ebenen nichts anderes als die Tangentenebenen der Hüllfläche sind (vgl. hierzu III, § 1).

Ein weiterer projektiver Begriff ist der der Schmiegebene, die wir in § 2 als Grenzlage der Verbindungsebene dreier Kurvenpunkte einführten. Wir suchen jetzt dual die Grenzlage des Schnittpunktes dreier Ebenen unserer Schar. Es seien (4), (5) und

$$f(u+k)=0 \tag{9}$$

mit $k \neq 0$ diese drei Ebenen. Wir setzen

$$f(u+k)=f(u)+kf'(u)+\tfrac{1}{2}k^2 f''(u+\delta k), \quad 0<\delta<1. \tag{10}$$

Geht man zunächst mit $h$ zur Grenze 0, so erhält man wie früher wieder (8). Wegen (4), (8) und (10) können wir statt (9) nach Kürzung durch $\frac{1}{2}k^2$

$$f''(u+\delta k)=0 \tag{11}$$

schreiben, und daraus wird für $k \to 0$

$$f''(u)=0. \tag{12}$$

Die drei (in den $x_i$ linearen) Gleichungen (4), (8) und (12) bestimmen für jeden Wert von $u$ einen Punkt. Der Ort aller dieser Punkte ist eine Kurve, die *Gratlinie* der Hüllfläche (oder der Ebenenschar) heißt und zu der Schar der Schmiegebenen der Kurve (1) dual ist. Die Tangentenfläche der Gratlinie ist mit der Hüllfläche, ihre Schmiegebenen sind mit den Ebenen der Schar (2) identisch. Damit schließen sich unsere Überlegungen. Wir sind von der Ebenenschar (2) zu einer Raumkurve und andrerseits von der Raumkurve (1) zu der Schar ihrer Schmiegebenen gekommen. Dazwischen liegt als ein zu sich selbst duales Gebilde eine geradlinige Fläche, die einmal als Tangentenfläche einer Raumkurve, einmal als Hüllfläche einer einparametrigen Ebenenschar auftritt. Derartige besondere geradlinige Flächen nennt man *Torsen*. Wir werden im Rahmen der allgemeinen Flächentheorie noch auf diese Flächenklasse zurückkommen und wollen hier nur die charakteristische Eigenschaft erwähnen, daß sie die einzigen Flächen sind, die sich auf die Ebene längentreu abbilden lassen oder die sich, wie man häufig auch sagt, auf die Ebene *abwickeln* lassen. Damit ist folgendes gemeint: Denkt man sich ein Stück einer Torse aus biegsamem, aber undehnbarem und unzerreißbarem Material, etwa aus dünnem Blech dargestellt, so kann man dieses Blechstück so verbiegen, daß es durchaus eben wird, was aber z. B. mit einem Stück eines kugelförmig gebogenen Bleches nicht möglich ist. Man nennt die Torsen daher manchmal auch *abwickelbare Flächen* (genauer müßte man sagen „auf die Ebene abwickelbar"). Diese Tatsache der Abwickelbarkeit ist für einen Sonderfall der Torsen aus der Elementargeometrie her bekannt, nämlich für die Kegel und Zylinder. Dual zur ebenen Kurve, d. h. zu einer Gesamtheit von $\infty^1$ Punkten einer Ebene, ist eine Schar von $\infty^1$ Ebenen durch einen Punkt; die Hüllfläche einer solchen Ebenenschar ist aber offenbar ein Kegel. Die Gratlinie artet hier in einen Punkt, den Scheitel des Kegels aus. Die Kegel und damit auch die Zylinder als Kegel mit uneigentlichem Scheitel sind also in der Tat Sonderfälle der Torsen, sofern man diese als Hüllflächen einparametriger Ebenenscharen und nicht als Tangentenflächen von Raumkurven ansieht.

Zu einer Raumkurve (1) gehören im ganzen drei ausgezeichnete Ebenenscharen, die von den drei Ebenen des begleitenden Dreibeins beim Durchlaufen der Kurve beschrieben werden. Die eine davon ist die Schar der Schmiegebenen, ihre Hüllfläche die Tangentenfläche und ihre Gratlinie die Kurve (1) selbst. Die zweite Schar ist die der Normalebenen, ihre Hüllfläche heißt *Polarfläche* oder *Evolutenfläche* (vgl. § 7 D) von (1) und ihre Gratlinie *Polarkurve* von (1). Die Gleichung der Schar der Normalebenen ist (4, 12), wenn dort die $z_i$ laufende Koordinaten in der Normalebene sind. Die $x_i$ und $\xi_i$ sind Funktionen von $s$, so daß diese zehn Veränderlichen $z_i$, $x_i$, $\xi_i$ und $s$ bzw.

an Stelle der $x_i$, $a_i$, $\lambda_i$ und $u$ der Gleichung (2) treten. Es korrespondiert also (4, 12) mit (4), (4, 13) mit (8) und (4, 14) mit (12). (4, 12) und (4, 13) zusammen geben die Erzeugenden der zugehörigen Torse: sie sind mit den Krümmungsachsen in den einzelnen Punkten der Kurve identisch, d. h. *die Polarfläche einer Kurve ist der Ort ihrer Krümmungsachsen.* (4, 12), (4, 13) und (4, 14) zusammen definieren die Gratlinie unserer Normalebenenschar, also gilt: *Die Polarkurve einer Raumkurve ist der Ort der Mittelpunkte ihrer Schmiegkugeln.*

Die dritte Schar wird von den rektifizierenden Ebenen

$$(z_i - x_i)\eta_i = 0 \tag{13}$$

von (1) gebildet. Für die Hüllfläche, die als *rektifizierende Fläche* bezeichnet wird, erhält man durch Differentiation nach $s$ die zweite Bedingung ($\tau \neq 0$)

$$(z_i - x_i)\left(\frac{\varkappa}{\tau}\xi_i - \zeta_i\right) = 0. \tag{14}$$

Die beiden Ebenen (13) und (14) schneiden sich in einer Erzeugenden, deren Richtung somit durch den Vektor

$$\varepsilon_{ikl}\left(\frac{\varkappa}{\tau}\xi_k - \zeta_k\right)\eta_l = \frac{\varkappa}{\tau}\zeta_i + \xi_i \tag{15}$$

gegeben ist; für den Winkel $\vartheta$, den diese Erzeugende mit der Tangente $\xi_i$ unserer Kurve einschließt, ergibt sich

$$\cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\varkappa}{\tau}\right)^2}} \tag{16}$$

oder

$$\tan\vartheta = \frac{\varkappa}{\tau}. \tag{17}$$

Die rektifizierende Ebene (13) ist zugleich Tangentenebene der rektifizierenden Fläche, ihr Normalvektor $\eta_i$ ist zugleich der Hauptnormalenvektor von (1). Nun sind aber (vgl. VI, § 3) jene Kurven auf einer Fläche, deren Hauptnormale in jedem Punkt mit der Flächennormale zusammenfällt, sogenannte *geodätische Linien* der Fläche, und diese stellen wieder unter gewissen Voraussetzungen die kürzesten Verbindungslinien zweier Punkte der Fläche dar (VI, § 4) und sind für die Geometrie auf der Fläche dasselbe wie die Geraden in der ebenen Geometrie. Somit ist jede Kurve (1) eine geodätische Linie auf ihrer rektifizierenden Fläche und muß also, da die erwähnten Voraussetzungen für die rektifizierende Fläche *als Torse* erfüllt sind, bei der Abwicklung derselben auf die Ebene in eine Gerade übergehen. Es wird also dadurch die Aufgabe der Rektifikation (Längenberechnung) von (1) gelöst;

damit sind auch die Namen „rektifizierende Ebene“ und „rektifizierende Fläche“ erklärt.

Bemerkt sei noch, daß die geradlinigen Flächen, die von den Haupt- und Binormalen einer Kurve beschrieben werden, im allgemeinen keine Torsen sind. Sicher ist das jedoch der Fall, wenn es sich um eine ebene Kurve handelt, deren Hauptnormalenfläche offenbar mit der Ebene der Kurve zusammenfällt, während die Binormalenfläche der über die Kurve senkrecht zu ihrer Ebene errichtete Zylinder ist. Wir werden später (VII, § 1) zeigen, daß die beiden Flächen auch *nur* in diesem Fall Torsen sind.

## § 6. Analytische Kurven im komplexen Raum. Die isotropen Kurven.

Unsere bisherigen Überlegungen beziehen sich ausdrücklich auf reelle Kurven, d. h. auf Kurven, in deren Parameterdarstellung

$$x_i = x_i(t) \tag{1}$$

die drei Funktionen $x_i(t)$ *reelle Funktionen der reellen Veränderlichen* $t$ sind. Lassen wir jedoch beliebige komplexe Funktionen und komplexe Werte des Parameters zu, so gelten unsere Resultate nur im allgemeinen; es treten Sonderfälle auf, die im reellen Raum unmöglich sind und die eine gesonderte Behandlung erfordern. Alle diese Sonderfälle stehen in besonderer Beziehung zum absoluten Kegelschnitt, betreffen also *isotrope Gebilde*. Beispiele solcher isotroper Gebilde haben wir in Abschnitt I kennengelernt (in I, § 4 die isotropen Vektoren, in I, § 6 die isotropen Ebenen und Geraden).

Zu bemerken ist vor allem, daß wir nach I, § 2 im komplexen Gebiet die Annahme machen müssen, daß die drei Funktionen $x_i(t)$ *analytische Funktionen* von $t$ sind. Wir sprechen dann kurz von der *analytischen Kurve* (1).

Wir geben zunächst eine Klassifikation der analytischen Kurven.[1]) Zur Abkürzung setzen wir

$$r_l = \varepsilon_{ikl}\dot{x}_i\ddot{x}_k, \tag{2}$$

$$A = r_l r_l = \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{hjl}\dot{x}_i\dot{x}_h\ddot{x}_k\ddot{x}_j = \dot{x}_i\dot{x}_i\ddot{x}_k\ddot{x}_k - (\dot{x}_i\ddot{x}_i)^2 \tag{3}$$

und

$$B = \varepsilon_{ikl}\dot{x}_i\ddot{x}_k\dddot{x}_l. \tag{4}$$

Verschwindet $A$ identisch in $t$, also längs der ganzen Kurve, so ist diese im reellen Fall eine Gerade, da aus $A = 0$ dann $r_i = 0$ folgt (§ 2). Im Komplexen

1) Vgl. E. Study, *Zur Differentialgeometrie der analytischen Kurven*, Transactions of the American Mathematical Society 10, 1909.

ist dieser Schluß unzulässig.[1]) Demgemäß unterscheiden wir zwei Klassen analytischer Kurven, nämlich die *regulären Kurven* mit $A \neq 0$ und die *singulären Kurven* mit $A = 0$. Beide Klassen zerfallen in ebene und nicht ebene Kurven (wir sehen ebene Kurven nicht als Gegensatz, sondern als Sonderfall der Raumkurven an), je nachdem $B$ identisch verschwindet oder nicht. Dabei rechnen wir zu den ebenen Kurven die Geraden, die durch das identische Verschwinden des Vektors $r_i$ charakterisiert sind.

Der Ausdruck $B$ ist die Wronskische Determinante der Funktionen $x_i$. Ihr Verschwinden ist notwendig und hinreichend dafür, daß die $\dot{x}_i$ linear abhängig sind, d. h. daß eine Relation $a_i \dot{x}_i = 0$ mit konstanten Koeffizienten $a_i$ identisch in $t$ besteht; daraus folgt aber dann wie in § 2, daß die Kurve eben ist. Ist nämlich zunächst $r_i = 0$, so ist die Kurve eine Gerade, also eben; ist jedoch $r_i \neq 0$ (aber $B = 0$), so können wir etwa

$$\dot{x}_1 \ddot{x}_2 - \dot{x}_2 \ddot{x}_1 \neq 0 \tag{5}$$

annehmen. Dann haben die beiden Gleichungen

$$u_1 \dot{x}_1 + u_2 \dot{x}_2 = \dot{x}_3, \quad u_1 \ddot{x}_1 + u_2 \ddot{x}_2 = \ddot{x}_3 \tag{6}$$

eindeutige analytische Lösungen $u_1, u_2$, die neben (6) auch der Gleichung

$$u_1 \dddot{x}_1 + u_2 \dddot{x}_2 = \dddot{x}_3 \tag{7}$$

genügen, die wegen $B = 0$ eine Folge von (6) ist. Durch Differentiation von (6) folgt wegen (6) und (7)

$$\dot{u}_1 \dot{x}_1 + \dot{u}_2 \dot{x}_2 = 0, \quad \dot{u}_1 \ddot{x}_1 + \dot{u}_2 \ddot{x}_2 = 0, \tag{8}$$

so daß wegen (5) $\dot{u}_1 = \dot{u}_2 = 0$, also $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2$ ($c_1, c_2$ konstant) ist. Wählt man die drei Konstanten $a_i$ so, daß $\frac{a_1}{a_3} = -c_1$ und $\frac{a_2}{a_3} = -c_2$ ist, so erhält man aus $c_1 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 = \dot{x}_3$ die obige Relation $a_i \dot{x}_i = 0$.[2])

Wie nun unmittelbar einzusehen ist, gilt die in § 1 bis § 5 entwickelte Theorie der Raumkurven ohne wesentliche Änderungen für die regulären analytischen Kurven auch im Komplexen. Wir wenden uns nun zu den nicht geradlinigen singulären analytischen Kurven. Die Bedingung $A = 0$, $r_i \neq 0$ besagt aber,

---

1) $A$ ist nach (3) das innere Produkt des Vektors $r_i$ mit sich selbst, also eine Summe von Quadraten; ist also $A = 0$, so ist dieser Vektor im Reellen der Nullvektor, im Komplexen der Nullvektor oder (allgemeiner Fall!) ein isotroper Vektor.

2) Zu bemerken ist, daß dieser Beweis auch für nicht analytische reelle Funktionen gilt, wenn sie nur dreimal stetig differenzierbar sind. Das stimmt damit überein, daß $B = 0$, $A \neq 0$ notwendig und hinreichend für das Verschwinden der Windung $\tau = \frac{B}{A}$ ist (vgl. (3, 11)); daß Kurven mit $\tau = 0$ eben sind und umgekehrt, haben wir bereits zweimal (§ 2 und § 3) nachgewiesen.

daß die Schmiegebenen (2, 18), d. h. $(z_i - x_i) r_i = 0$ dieser Kurven isotrop sind, so daß wir auch die Kurven selbst *isotrope Kurven* nennen. Die nicht ebenen isotropen Kurven haben nun die charakteristische Eigenschaft, daß auf ihnen

$$\dot{x}_i \dot{x}_i = 0 \tag{9}$$

dentisch in $t$ gilt. Zum Beweis[1]) berechnen wir

$$\dot{A} = 2(\dot{x}_i \dot{x}_i \ddot{x}_k \dddot{x}_k - \dot{x}_i \ddot{x}_i \dot{x}_k \dddot{x}_k) \tag{10}$$

und nach (I, 5, 16)

$$B^2 = \begin{vmatrix} \dot{x}_i \dot{x}_i & \dot{x}_j \ddot{x}_j & \dot{x}_k \dddot{x}_k \\ \dot{x}_i \ddot{x}_i & \ddot{x}_j \ddot{x}_j & \ddot{x}_k \dddot{x}_k \\ \dot{x}_i \dddot{x}_i & \ddot{x}_j \dddot{x}_j & \dddot{x}_k \dddot{x}_k \end{vmatrix}.$$

Entwickeln wir diese Determinante nach den Elementen der letzten Zeile, so fallen wegen $A = \dot{A} = 0$ die beiden letzten Glieder weg und es bleibt

$$B^2 = \dot{x}_i \dddot{x}_i (\dot{x}_j \ddot{x}_j \ddot{x}_k \dddot{x}_k - \ddot{x}_j \ddot{x}_j \dot{x}_k \dddot{x}_k). \tag{11}$$

Wäre nun $\dot{x}_i \dot{x}_i \neq 0$, so erhielte man wegen $A = 0$

$$\dot{x}_i \dot{x}_i B^2 = \dot{x}_i \ddot{x}_i \dot{x}_j \dddot{x}_j (\dot{x}_l \dot{x}_l \ddot{x}_k \dddot{x}_k - \dot{x}_l \ddot{x}_l \dot{x}_k \dddot{x}_k)$$

und daraus wegen $\dot{A} = 0$ weiter $\dot{x}_i \dot{x}_i B^2 = 0$, also $B^2 = 0$ und damit auch $B = 0$ in Widerspruch zu der Annahme, daß es sich um eine nicht ebene Kurve handeln soll.

Aus (9) folgt, daß die (auf der Kurve gemessene) Entfernung zweier beliebiger Punkte einer solchen Kurve wegen $ds^2 = \dot{x}_i \dot{x}_i \, dt^2$ stets den Wert Null hat; wir nennen solche Kurven verschwindender Bogenlänge *ametrische Kurven*. Es gilt also: *Alle nicht ametrischen isotropen Kurven sind Kurven in isotropen Ebenen.* Wir zeigen weiter: *Alle ebenen ametrischen Kurven sind ametrische Gerade.*[2]) Aus (9) folgt durch zweimalige Differentiation

$$\dot{x}_i \ddot{x}_i = 0, \quad \dot{x}_i \dddot{x}_i + \ddot{x}_i \ddot{x}_i = 0; \tag{12}$$

bezeichnen wir mit $w_i$ einen willkürlichen Vektor, so wird

$$(\varepsilon_{ikl} \dot{x}_i \ddot{x}_k w_l)^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dot{x}_i w_i \\ 0 & \ddot{x}_i \ddot{x}_i & \ddot{x}_i w_i \\ \dot{x}_i w_i & \ddot{x}_i w_i & w_i w_i \end{vmatrix} = -(\dot{x}_i w_i)^2 \ddot{x}_i \ddot{x}_i. \tag{13}$$

---

1) Geometrisch ist das unmittelbar einzusehen. Jede Kurventangente ist ja die Grenzlage der Schnittgeraden gegeneinander konvergierender Schmiegebenen (§ 5); sind diese isotrop, so ist die Tangente eine ametrische Gerade (I, § 6 B), für die also (9) gilt.

2) Auch dieser Satz ist geometrisch nahezu evident, da es in einer isotropen Ebene nur eine einzige isotrope Richtung gibt, eine krumme ametrische Kurve aber $\infty^1$ verschiedene isotrope Tangentenrichtungen hat.

Setzen wir insbesondere $w_i = \dot{x}_i$, so erhalten wir $B^2 = (\dot{x}_i \ddot{x}_i)^2 \dot{x}_i \dot{x}_i$ und wegen (12) und $B = 0$

$$x_i \ddot{x}_i = 0, \tag{14}$$

also aus (13) $\qquad \varepsilon_{ikl} \dot{x}_i \ddot{x}_k w_l = 0,$

so daß wegen der Willkürlichkeit von $w_i$ in der Tat

$$r_l = \varepsilon_{ikl} \dot{x}_i \ddot{x}_k = 0 \tag{15}$$

ist. Damit ist unsere Klassifikation fertig; wir stellen das Ergebnis in einer Tabelle zusammen:

I. Reguläre Kurven: $A \neq 0$.

1. *Unebene reguläre Kurven*: $B \neq 0$.
2. *Ebene reguläre Kurven*: $B = 0$.

II. Singuläre Kurven: $A = 0$.

1. *Ametrische nicht geradlinige Kurven*: $B \neq 0$. Charakteristisch sind auch die Bedingungen $\dot{x}_i \dot{x}_i = 0$, $r_i \neq 0$.[1])
2. *Kurven in isotropen Ebenen*: $B = 0$, $r_i \neq 0$.
3. *Euklidische Gerade*: $r_i = 0$, $\dot{x}_i \dot{x}_i \neq 0$.
4. *Ametrische Gerade*: $r_i = 0$, $\dot{x}_i \dot{x}_i = 0$.

Mit den Kurven II. 1. wollen wir uns noch etwas ausführlicher, mit den Kurven II. 2. nur kurz beschäftigen. Wir beginnen mit den letzteren.

Wir denken uns die kartesischen Koordinaten so gewählt, daß

$$x_2 + i x_3 = 0 \tag{16}$$

die (isotrope) Ebene unserer Kurve ist, deren Parameterdarstellung dann die Form

$$x_1 = i f(t), \quad x_2 = g(t), \quad x_3 = i g(t) \tag{17}$$

hat. Es wird dann

$$\dot{x}_1 = i \dot{f}, \quad \dot{x}_2 = \dot{g}, \quad \dot{x}_3 = i \dot{g} \tag{18}$$

und

$$ds^2 = \dot{x}_i \dot{x}_i \, dt^2 = -\dot{f}^2 dt^2, \tag{19}$$

d. h. *das quadrierte Bogenelement ist das Quadrat eines* (bis auf das Vorzeichen bestimmten) *vollständigen Differentials*. Ist $\dot{f} = 0$, so ist (17) eine ametrische

1) Denn aus $\dot{x}_i \dot{x}_i = 0$ folgt $\dot{x}_i \ddot{x}_i = 0$ und somit $A = 0$; da alle ebenen ametrischen Kurven Gerade sind, folgt aus $r_i \neq 0$ auch $B \neq 0$.

Gerade; wir nehmen also $\dot{f} \neq 0$ an. Aus (3, 8) entnehmen wir, daß die Krümmung den bestimmten Wert Null hat, während die Windung (3, 11) ihren Sinn verliert. Die Tangenten sind euklidische, die Hauptnormalen isotrope Gerade, da in einer isotropen Ebene nur die eine isotrope Richtung senkrecht zur Richtung einer euklidischen Geraden ist.

Wir kommen zu den ametrischen Kurven II. 1. Da ihre Schmiegebenen isotrop sind, können wir sie als Gratlinien einer einparametrigen Schar isotroper Ebenen erhalten. Eine solche Schar ergibt sich, wenn wir in der allgemeinen Darstellung (I, 6, 5) etwa $v$ als Funktion von $u$ annehmen. Wir setzen

$$v = -i f(u), \tag{20}$$

wobei $f$ eine analytische Funktion von $u$ ist, deren dritte Ableitung $\dddot{f}$ nicht identisch verschwindet. Es folgt

$$(u^2 - 1)x_1 - i(u^2 + 1)x_2 + 2ux_3 = -2if \tag{21}$$

und daraus durch zweimalige Differentiation nach $u$

$$ux_1 - iux_2 + x_3 = -i\dot{f}, \tag{22}$$

$$x_1 - ix_2 \qquad = -i\ddot{f}. \tag{23}$$

Durch Auflösung der Gleichungen (21) bis (23) nach den $x_i$ erhält man

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= i\left(f - u\dot{f} + \frac{u^2-1}{2}\ddot{f}\right) \\ x_2 &= f - u\dot{f} + \frac{u^2+1}{2}\ddot{f} \\ x_3 &= -i\left(\dot{f} - u\ddot{f}\right). \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Es ist das eine allgemeine, alle ametrischen Kurven umfassende Darstellung, die nur von der willkürlichen analytischen Funktion $f(u)$ abhängt. Es gehört also zu jeder analytischen Funktion eine ametrische Kurve und umgekehrt. Auf diesen bemerkenswerten Zusammenhang werden wir später (VII, § 3) noch zurückkommen.

Für den Tangentenvektor erhalten wir aus (24)

$$\dot{x}_1 = i\frac{u^2-1}{2}\dddot{f}, \quad \dot{x}_2 = \frac{u^2+1}{2}\dddot{f}, \quad \dot{x}_3 = iu\dddot{f}, \tag{25}$$

so daß richtig

$$\dot{x}_i\dot{x}_i = 0 \tag{26}$$

wird. Wir erkennen daraus auch, daß die Bedingung $\dddot{f} \neq 0$ notwendig war, um auf eine Kurve und nicht auf einen Punkt zu kommen.

Wir suchen noch die einfachsten Differentialinvarianten unserer Kurven aufzustellen; Bogenlänge, Krümmung und Windung verlieren offenbar jede Bedeutung. Aus

$$(13)\qquad (\varepsilon_{ikl}\dot{x}_i\ddot{x}_k w_l)^2 = -\ddot{x}_i\ddot{x}_i(\dot{x}_i w_i)^2$$

folgt wegen (12)

$$(27)\qquad (\varepsilon_{ikl}\dot{x}_i\ddot{x}_k\dddot{x}_l)^2 = -(\ddot{x}_i\ddot{x}_i)^3,$$

sowie wegen der Willkürlichkeit von $w_i$

$$(28)\qquad r_l = \varepsilon_{ikl}\dot{x}_i\ddot{x}_k = \dot{x}_l\sqrt{-\ddot{x}_i\ddot{x}_i},$$

so daß für nicht geradlinige ametrische Kurven ($r_l \neq 0$) auch $\ddot{x}_i\ddot{x}_i \neq 0$ sein muß. Wegen (27) ist dann auch $B \neq 0$.[1]) Führen wir durch $t = t(p)$, wo $t$ eine analytische Funktion von $p$ ist, einen neuen Kurvenparameter $p$ ein, so wird, wenn wir die Ableitungen nach $p$ durch Striche, die nach $t$ wie bisher durch Punkte bezeichnen,

$$x_i'\dot{p} = \dot{x}_i, \quad x_i'\ddot{p} + x_i''\dot{p}^2 = \ddot{x}_i,$$

also

$$(29)\qquad x_i''x_i''\dot{p}^4 = \ddot{x}_i\ddot{x}_i.$$

Wollen wir also den neuen Parameter $p$ so normieren, daß $x_i''x_i'' = -1$ wird, so müssen wir

$$(30)\qquad \dot{p}^2 = \sqrt{-\ddot{x}_i\ddot{x}_i}$$

oder

$$(31)\qquad p = \int \sqrt[4]{-\ddot{x}_i\ddot{x}_i}\,dt$$

nehmen. Der gegenüber Bewegungen und analytischen Parametertransformationen invariante Parameter $p$ tritt an Stelle der Bogenlänge der regulären Kurven. Es gilt dann

$$(32)\quad x_i'x_i' = 0,\quad x_i'x_i'' = 0,\quad x_i''x_i'' = -1,\quad x_i'x_i''' = 1,\quad x_i''x_i''' = 0,$$

ferner wegen (13)

$$(33)\qquad \varepsilon_{ikl}x_i'x_k''w_l = \pm x_i'w_i$$

also, da $w_i$ willkürlich ist

$$(34)\qquad \varepsilon_{ikl}x_i'x_k'' = \pm x_l'$$

und insbesondere

$$(35)\qquad \varepsilon_{ikl}x_i'x_k''x_l''' = \pm 1.$$

---

1) Vgl. die Anmerkung auf S. 64.

Der Ausdruck

(36) $$J = x_i''' x_i''' = - x_i'' x_i''''$$

ist somit die *Differentialinvariante niedrigster Ordnung*, die nicht konstant ist.[1]) Wir fragen uns zunächst, was die Identität $J = 0$ bedeutet. Wegen (36) ist dann $x_i'''$ isotrop oder Nullvektor; ferner gilt, wie man leicht nachrechnet,

$$x_i' x_i'''' = x_i'' x_i'''' = x_i''' x_i'''' = 0,$$

so daß wegen der Unabhängigkeit der Vektoren $x_i', x_i'', x_i'''$ jedenfalls $x_i'''' = 0$ und somit

(37) $$x_i = a_i p^3 + b_i p^2 + c_i p + d_i$$

gilt, d. h. *die Kurven mit $J = 0$ sind rationale Kurven dritter Ordnung.* Wegen (32) und $J = 0$ genügen die Vektoren $a_i, b_i, c_i$ den Bedingungen

(38) $$a_i a_i = 0, \quad a_i b_i = 0, \quad a_i c_i = \tfrac{1}{6}, \quad b_i b_i = -\tfrac{1}{4}, \quad b_i c_i = c_i c_i = 0,$$

die zeigen, daß es Kurven mit $x_i''' = 0$ überhaupt nicht geben kann; für eine solche wäre ja $a_i = 0$ in Widerspruch zur dritten Gleichung (38).

Es bietet nun keine Schwierigkeit mehr, die Theorie der ametrischen Kurven durch die Einführung eines begleitenden Dreibeins $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$ und durch die Aufstellung von Ableitungsgleichungen — die also die Analoga zu den FRENETschen Formeln für die regulären Kurven sind — zu einem gewissen Abschluß zu bringen. Wir schließen dabei die Kurven (37) mit $J = 0$ aus und setzen

(39) $$\xi_i = x_i', \quad \eta_i = i x_i'', \quad \zeta_i = \frac{1}{\sqrt{J}} x_i''',$$

so daß

(40) $$\xi_i \xi_i = 0, \quad \xi_i \eta_i = 0, \quad \xi_i \zeta_i = \frac{1}{\sqrt{J}}, \quad \eta_i \eta_i = 1, \quad \eta_i \zeta_i = 0, \quad \zeta_i \zeta_i = 1$$

ist. Aus (39) erhält man sofort die ersten zwei Ableitungsgleichungen, nämlich

(41) $$\xi_i' = - i \eta_i, \quad \eta_i' = i \sqrt{J} \zeta_i.$$

Für $\zeta_i'$ machen wir den Ansatz

(42) $$\zeta_i' = - \frac{J'}{2\sqrt{J^3}} x_i''' + \frac{1}{\sqrt{J}} x_i'''' = a \xi_i + b \eta_i + c \zeta_i.$$

Zur Berechnung von $a, b, c$ benötigen wir noch die Formeln

(43) $$x_i' x_i'''' = 0, \quad x_i''' x_i'''' = \tfrac{1}{2} J',$$

von denen die erste sich durch Differentiation der vorletzten Gleichung (32) unter Berücksichtigung der letzten ergibt, während die zweite aus (36) folgt.

---

1) *Ordnung* einer Differentialinvariante ist die Ordnung des höchsten in ihr auftretenden Differentialquotienten.

Aus (42) erhalten wir dann wegen (32), (36), (40) und (43)

$$\xi_i \zeta_i' = -\frac{J'}{2\sqrt{J^3}} = \frac{c}{\sqrt{J}}, \quad \eta_i \zeta_i' = -i\sqrt{J} = b, \quad \zeta_i \zeta_i' = 0 = \frac{a}{\sqrt{J}} + c,$$

also

$$a = \frac{J'}{2\sqrt{J}}, \quad b = -i\sqrt{J}, \quad c = -\frac{J'}{2J}$$

und somit die dritte Ableitungsgleichung

$$\zeta_i' = \frac{J'}{2\sqrt{J}}\xi_i - i\sqrt{J}\eta_i - \frac{J'}{2J}\zeta_i. \tag{44}$$

In den Gleichungen (41) und (44) treten neben den Vektoren des begleitenden Dreibeins nur die Funktionen $J$ und $J'$ auf. Daraus folgt ähnlich wie in § 3, daß eine ametrische Kurve bis auf Bewegungen bestimmt ist, wenn $J$ als analytische Funktion des invarianten Parameters $p$ gegeben ist. Wir können also

$$J = \varphi(p)$$

als *natürliche Gleichung einer ametrischen Kurve* betrachten.

## § 7. Ergänzungen und Aufgaben.

**A. Die Bewegung des begleitenden Dreibeins beim Durchlaufen der Kurve.** Das begleitende Dreibein erfährt beim Durchlaufen der Raumkurve

$$x_i = x_i(s) \tag{1}$$

(die Funktionen $x_i$ nehmen wir dabei wieder als reelle und mindestens einmal stetig differenzierbare Funktionen der reellen Bogenlänge $s$ an) neben der durch (1) gegebenen fortschreitenden Bewegung noch gewisse Drehungen, die offenbar durch die Frenetschen Formeln (2, 15) bestimmt sind. Wir wollen diese Drehungen näher untersuchen und leiten uns dazu zunächst eine

Formel für die Drehung eines starren Körpers (das begleitende Dreibein ist ein solcher) her.

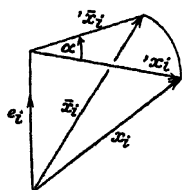



Fig. 6.

Es sei die Richtung der Drehachse durch den Einheitsvektor $e_i$ und der Drehwinkel $\alpha$ gegeben. Irgendein Punkt $P$ des starren Körpers sei vor der Drehung gegeben durch den von einem Punkt $O$ der Drehachse (Fig. 6) aus gezogenen Ortsvektor $x_i$, nach der Drehung durch den vom selben Punkt aus gezogenen Ortsvektor $\bar{x}_i$. Es handelt sich also darum, $\bar{x}_i$ durch $x_i$, $e_i$ und $\alpha$ auszudrücken. Das wird sofort möglich sein, wenn wir drei Bedingungen angeben, denen der Vektor $\bar{x}_i$ zu genügen hat. Die erste dieser Bedingungen ist

$$\bar{x}_i \bar{x}_i = x_i x_i, \tag{2}$$

die bekannte (I, § 1) Forderung der Invarianz der Länge bei allen Bewegungen. Die zweite Bedingung

$$\bar{x}_i e_i = x_i e_i \tag{3}$$

sagt, daß die Projektionen von $\bar{x}_i$ und $x_i$ in die Richtung $e_i$ gleiche Länge haben. Die dritte Bedingung

$${}'\bar{x}_i {}'x_i = \sqrt{({}'\bar{x}_j {}'\bar{x}_j)({}'x_h {}'x_h)} \cos\alpha, \tag{4}$$

wo ${}'\bar{x}_i$ und ${}'x_i$ bzw. die Projektionen von $\bar{x}_i$ und $x_i$ in die zu $e_i$ senkrechte Ebene bedeuten, sagt schließlich aus, daß der Drehungswinkel die Größe $\alpha$ hat. Dabei wollen wir $\alpha$ positiv oder negativ nehmen, je nachdem die Drehung zusammen mit einem Fortschreiten in der positiven Richtung von $e_i$ eine Rechtsschraube oder eine Linksschraube gibt. Wegen (I, 4, 15)

$${}'\bar{x}_i = \bar{x}_i - \bar{x}_j e_j e_i, \qquad {}'x_i = x_i - x_j e_j e_i$$

und (3) kann man statt (4) auch

$$\bar{x}_i x_i - (x_i e_i)^2 = [x_i x_i - (x_i e_i)^2] \cos\alpha$$

oder

$$\bar{x}_i x_i = x_i x_i \cos\alpha + (x_i e_i)^2 (1 - \cos\alpha) \tag{5}$$

schreiben.

Da wir jedenfalls annehmen, daß die Vektoren $x_i$ und $e_i$ linear unabhängig sind, sind auch die drei Vektoren $x_i$, $e_i$ und $\varepsilon_{ikl} e_k x_l$ linear unabhängig und wir können den Ansatz machen

$$\bar{x}_i = a x_i + b e_i + c \varepsilon_{ikl} e_k x_l. \tag{6}$$

Dabei hat das Vorzeichen von $c$ mit dem von $\alpha$ übereinzustimmen. Setzt man (6) zunächst in die in den $\bar{x}_i$ linearen Bedingungen (3) und (5) ein, so erhält man zwei lineare Gleichungen für $a$ und $b$, nämlich

$$a e_i x_i + b = e_i x_i \quad \text{und} \quad a x_i x_i + b e_i x_i = x_i x_i \cos\alpha + (e_i x_i)^2 (1 - \cos\alpha),$$

woraus ohne Schwierigkeit

$$a = \cos\alpha, \qquad b = (e_i x_i)(1 - \cos\alpha) \tag{7}$$

folgt. Aus der ersten Bedingung (2) erhält man schließlich wegen (7)

$$c^2 \varepsilon_{ijh} \varepsilon_{ikl} e_j e_k x_h x_l = c^2 [x_i x_i - (e_i x_i)^2] = [x_i x_i - (e_i x_i)^2](1 - \cos^2\alpha)$$

also

$$c = \sin\alpha, \tag{8}$$

entsprechend unserer Vereinbarung über das Vorzeichen. Somit ist

$$\bar{x}_i = x_i \cos\alpha + e_i e_j x_j (1 - \cos\alpha) + \varepsilon_{ikl} e_k x_l \sin\alpha \tag{9}$$

die gesuchte Formel für die Drehung eines starren Körpers. Aus (9) folgt durch Differentiation nach $\alpha$

$$\frac{d\bar{x}_i}{d\alpha} = - x_i \sin\alpha + e_i e_j x_j \sin\alpha + \varepsilon_{ikl} e_k x_l \cos\alpha,$$

also für $\alpha = 0$ wegen $\bar{x}_i = x_i$

$$\left(\frac{dx_i}{d\alpha}\right)_0 = \varepsilon_{ikl} e_k x_l$$

oder

$$dx_i = \varepsilon_{ikl} e_k x_l \, d\alpha, \tag{10}$$

eine Formel für die *infinitesimale Drehung*.[1]) In der Regel pflegt man den infinitesimalen Vektor

$$d_i = e_i \, d\alpha, \tag{11}$$

dessen Richtung die Richtung der Drehachse und dessen Länge und Sinn den Drehwinkel angeben, als *Drehvektor* zu bezeichnen und zur Beschreibung der infinitesimalen Drehung zu verwenden. Statt (10) erhält man dann

$$dx_i = \varepsilon_{ikl} d_k x_l. \tag{12}$$

Die infinitesimale Drehung des begleitenden Dreibeins ist, wie schon erwähnt, durch die FRENETschen Formeln bestimmt, die wir jetzt

$$\begin{aligned} d\xi_i &= \varkappa \eta_i ds \\ d\eta_i &= (-\varkappa \xi_i + \tau \zeta_i)\, ds \\ d\zeta_i &= -\tau \eta_i \, ds \end{aligned} \tag{13}$$

schreiben; diese Formeln geben ja offenbar in erster Annäherung die Änderungen der Vektoren des begleitenden Dreibeins an, wenn sich ihr gemeinsamer Anfangspunkt auf der Kurve um das kleine Stück $ds$ verschiebt. Es muß also einen Drehvektor $d_i$ geben, so daß die drei Formeln (13) alle die Form (12) annehmen. Wir können jedenfalls

$$d_i = a\xi_i + b\eta_i + c\zeta_i$$

setzen. Dann muß also

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ikl} d_k \xi_l &= -b\zeta_i + c\eta_i = \varkappa \eta_i \, ds \\ \varepsilon_{ikl} d_k \eta_l &= \quad a\zeta_i - c\xi_i = (-\varkappa \xi_i + \tau \zeta_i)\, ds \\ \varepsilon_{ikl} d_k \zeta_l &= -a\eta_i + b\xi_i = -\tau \eta_i \, ds \end{aligned}$$

1) Man kommt zu (10) auch, wenn man in (9) unter $\alpha$ einen sehr kleinen Winkel versteht und die bekannten Näherungsformeln $\sin\alpha \doteq \alpha$, $\cos\alpha \doteq 1$ anwendet, $dx_i$ statt $\bar{x}_i - x_i$ und $d\alpha$ statt $\alpha$ schreibt. (10) gibt also in erster Annäherung die Änderung des Ortsvektors $x_i$ bei der Drehung durch den kleinen Winkel $d\alpha$ an.

sein; diese Gleichungen für $a, b, c$ sind widerspruchsfrei lösbar und geben $a = \tau\, ds$, $b = 0$, $c = \varkappa\, ds$, also

(14) $$\mathfrak{d}_i = (\tau \mathfrak{x}_i + \varkappa \mathfrak{z}_i)\, ds.$$

Der Vergleich von (14) und (11) zeigt, daß

(15) $$d\alpha = \sqrt{\varkappa^2 + \tau^2}\, ds$$

ist. Erfolgt die Bewegung längs der Kurve mit der Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt} = 1$, wo $t$ die Zeit bedeutet, so folgt aus (15), daß die Drehung des Dreibeins mit der Winkelgeschwindigkeit

(16) $$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{\varkappa^2 + \tau^2}$$

erfolgt.

**B. Böschungslinien und Böschungsflächen.** Unter Böschungslinien versteht man Kurven, deren sämtliche Tangenten mit einer festen Richtung $p_i$ denselben Winkel $\alpha$ einschließen. Es gilt also ($p_i p_i = 1$)

(17) $$\xi_i p_i = \cos\alpha$$

mit konstantem $\alpha$. Durch Differentiation nach $s$ folgt

(18) $$\eta_i p_i = 0,$$

d. h. alle Hauptnormalen einer Böschungslinie stehen auf $p_i$ senkrecht; wegen (17) und (18) ist also

(19) $$\zeta_i p_i = \sin\alpha.$$

Aus (18) folgt weiter durch Differentiation

$$(-\varkappa \xi_i + \tau \zeta_i) p_i = 0$$

oder

$$\varkappa \cos\alpha = \tau \sin\alpha.$$

Es ist also

(20) $$\frac{\varkappa}{\tau} = \tan\alpha$$

längs der ganzen Kurve konstant. Diese Bedingung (20) ist aber auch hinreichend dafür, daß eine Kurve eine Böschungslinie ist. Aus der Konstanz von $\frac{\varkappa}{\tau} = k$ folgt nämlich umgekehrt wegen der ersten und dritten Frenetschen Formel (2, 15)

$$\xi_i' + \frac{\varkappa}{\tau} \zeta_i' = \xi_i' + k \zeta_i' = \frac{d}{ds}(\xi_i + k \zeta_i) = 0.$$

Es ist somit der Einheitsvektor

(21) $$p_i = \frac{\xi_i + k \zeta_i}{\sqrt{1 + k^2}}$$

und wegen

(22) $$\xi_i p_i = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}}$$

auch der Winkel $\alpha$ konstant, den er mit dem Tangentenvektor der Kurve einschließt, w. z. b. w.

Vergleichen wir die Formeln (5, 15) und (5, 16) mit (21) und (22), so erhalten wir den Satz: *Die rektifizierende Fläche einer Böschungslinie $C$ ist ein Zylinder, dessen Erzeugende die Richtung* (21) *haben und von $C$ unter dem festen Winkel $\alpha$ geschnitten werden.* Aus diesem Grund nennt man die Böschungslinien vielfach auch *(allgemeine) Schraubenlinien.*[1]) Daß $C$ bei der Abwicklung der rektifizierenden Fläche auf eine Ebene in eine Gerade übergeht, ist hier besonders leicht einzusehen.

Die Tangentenflächen der Böschungslinien bezeichnet man als *Böschungsflächen*; sie haben die charakteristische Eigenschaft, daß ihre sämtlichen Tangentenebenen mit einer festen Richtung denselben Winkel einschließen. Daß diese Bedingung für die Tangentenfläche einer Böschungslinie stets erfüllt ist, folgt unmittelbar aus (19), da $\zeta_i$ zugleich der Normalenvektor der Fläche (oder ihrer Tangentenebene) ist; wegen der Umkehrung vgl. IV, § 4.

**C. Bertrandsche Kurven.** Es sei eine Raumkurve $C$

$$x_i = x_i(s) \tag{23}$$

gegeben; wir stellen uns die Frage nach der Existenz von Kurven $\bar{C}$, deren Hauptnormalen mit den Hauptnormalen von (23) zusammenfallen.

Eine solche Kurve muß sich jedenfalls in der Form

$$\bar{x}_i = x_i + \lambda \eta_i \tag{24}$$

darstellen lassen. Bezeichnen wir alle Größen, die sich auf $\bar{C}$ beziehen, mit Querstrichen, so können wir unsere Forderung wegen (24) in der Form

$$\bar{\eta}_i = \varepsilon \eta_i \tag{25}$$

schreiben, wo $\varepsilon$ entweder $+1$ oder $-1$ ist. Durch Differentiation nach $s$ folgt aus (24)

$$\bar{x}_i' = \bar{\xi}_i \frac{d\bar{s}}{ds} = (1 - \lambda\varkappa)\,\xi_i + \lambda' \eta_i + \lambda\tau\zeta_i, \tag{26}$$

und da wegen (25) $\qquad \bar{\xi}_i \bar{\eta}_i = \varepsilon \bar{\xi}_i \eta_i = 0$

ist, muß auch $\lambda' = 0$, d. h. $\lambda$ *konstant* sein. Ist $\vartheta$ der Winkel zwischen den Tangenten von $C$ und $\bar{C}$ in entsprechenden Punkten (d. h. in Punkten mit demselben $s$), also $\xi_i \bar{\xi}_i = \cos\vartheta$, so ist

$$\bar{\xi}_i = \xi_i \cos\vartheta + \zeta_i \sin\vartheta \tag{27}$$

und

$$\bar{\zeta}_i = \varepsilon(-\xi_i \sin\vartheta + \zeta_i \cos\vartheta). \tag{28}$$

---

1) Die Bezeichnung Böschungslinie stammt von E. Müller.

Differenziert man (27) nach $s$, so folgt

$$\bar{\varkappa}\bar{\eta}_i \frac{d\bar{s}}{ds} = \eta_i(\varkappa\cos\vartheta - \tau\sin\vartheta) + \xi_i\frac{d\cos\vartheta}{ds} + \zeta_i\frac{d\sin\vartheta}{ds}$$

und der Vergleich mit (25) zeigt, daß

$$\frac{d\vartheta}{ds} = 0$$

ist, also $\vartheta$ *konstant* sein muß. Aus (26) und (27) erhält man durch Koeffizientenvergleich

$$\cos\vartheta\frac{d\bar{s}}{ds} = 1 - \lambda\varkappa \quad \text{und} \quad \sin\vartheta\frac{d\bar{s}}{ds} = \lambda\tau. \tag{29}$$

Eliminiert man noch $\frac{d\bar{s}}{ds}$ aus diesen beiden Gleichungen, so folgt

$$\lambda\varkappa\sin\vartheta + \lambda\tau\cos\vartheta = \sin\vartheta \tag{30}$$

oder, wenn man $\lambda\cot\vartheta = \mu$ setzt,

$$\lambda\varkappa + \mu\tau = 1 \tag{31}$$

d. h. *zwischen Krümmung und Windung muß eine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten bestehen.*[1]) Man überzeugt sich leicht, daß diese Bedingung auch hinreichend ist. Kurven, deren Krümmung und Windung einer Gleichung von der Form (31) genügen, heißen *Bertrandsche Kurven.* Zu jeder Bertrandschen Kurve $C$ gibt es also im allgemeinen stets eine und nur eine Kurve $\bar{C}$, so daß $C$ und $\bar{C}$ gemeinsame Hauptnormalen haben. $\bar{C}$ ist offenbar ebenfalls eine Bertrandsche Kurve, zwischen Krümmung $\bar{\varkappa}$ und Windung $\bar{\tau}$ von $\bar{C}$ muß also auch eine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten bestehen, die wir durch eine Umkehrung der obigen Überlegungen erhalten. Aus (24) folgt

$$x_i = \bar{x}_i - \varepsilon\lambda\bar{\eta}_i; \tag{32}$$

multipliziert man ferner (27) mit $\cos\vartheta$ und (28) mit $-\varepsilon\sin\vartheta$ und addiert dann, so ergibt sich

$$\xi_i = \bar{\xi}_i\cos\vartheta - \varepsilon\bar{\zeta}_i\sin\vartheta. \tag{33}$$

Setzt man also

$$\bar{\lambda} = -\varepsilon\lambda \quad \text{und} \quad \bar{\vartheta} = -\varepsilon\vartheta, \tag{34}$$

---

1) Dabei ist der Fall $\vartheta = 0$ ausgeschlossen. Ist $\vartheta = 0$, so folgt aus (30) entweder $\lambda = 0$, also nach (24) $\bar{x}_i = x_i$, oder $\tau = 0$, also eine ebene Kurve. Beide Fälle sind ohne Interesse.

so unterscheidet sich (32) von (24) und (33) von (27) nur durch die Vertauschung der gestrichenen und ungestrichenen Größen; an Stelle von (31) tritt also $\bar{\lambda}\bar{\varkappa} + \bar{\mu}\bar{\tau} = 1$ oder wegen (34)

$$(35) \qquad -\varepsilon\lambda\bar{\varkappa} + \mu\bar{\tau} = 1.$$

Kehrt man in derselben Weise die beiden Gleichungen (29) um, so folgt

$$(36) \qquad \cos\vartheta \frac{ds}{d\bar{s}} = 1 + \varepsilon\lambda\bar{\varkappa} \quad \text{und} \quad \sin\vartheta \frac{ds}{d\bar{s}} = \lambda\bar{\tau}.$$

Eliminiert man $\frac{ds}{d\bar{s}}$ aus den beiden zweiten Gleichungen (29) und (36), so erhält man den Satz von SCHELL

$$(37) \qquad \tau\bar{\tau} = \frac{\sin^2\vartheta}{\lambda^2},$$

d. h. *das Produkt der Windungen eines Bertrandschen Kurvenpaares ist eine (positive) Konstante.* Dasselbe mit den beiden ersten Gleichungen (29) und (36) ausgeführt gibt die Formel

$$(38) \qquad (1 - \lambda\varkappa)(1 + \varepsilon\lambda\bar{\varkappa}) = \cos^2\vartheta.$$

Sind $P$ und $\bar{P}$ zwei entsprechende Punkte eines Bertrandschen Kurvenpaares, $M$ und $\bar{M}$ die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte, so sind die von $P$ aus auf der Hauptnormalen von $C$ gemessenen Abszissen dieser vier Punkte der Reihe nach $0$, $\lambda$, $\frac{1}{\varkappa}$, $\frac{\varepsilon}{\bar{\varkappa}} + \lambda$ und für ihr Doppelverhältnis ergibt sich wegen (38) der Wert $\frac{1}{\cos^2\vartheta}$. Damit haben wir den Satz von MANNHEIM gefunden: *Das Doppelverhältnis zweier entsprechender Punkte eines Bertrandschen Kurvenpaares und der beiden zugehörigen Krümmungsmittelpunkte ist eine (positive) Konstante.*

Als Sonderfälle erhält man aus (30) für $\vartheta = 0$ die ebenen und für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ die Kurven konstanter Krümmung. Bei den letzteren fällt der Mittelpunkt der Schmiegkugel in den Krümmungsmittelpunkt und die zugehörige zweite Bertrandkurve fällt mit der Polarkurve zusammen. Eliminiert man aus (31) und (35), wo jetzt $\mu = 0$ zu nehmen ist, die Konstante $\lambda$, so erhält man noch $\bar{\varkappa} = \varkappa$. Also gilt: *Die Polarkurve $\bar{C}$ einer Kurve $C$ von konstanter Krümmung $\varkappa$ ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte von $C$, hat dieselbe Krümmung $\varkappa$ wie $C$ und bildet mit $C$ zusammen ein Bertrandsches Kurvenpaar.*

Ist sowohl die Krümmung $\varkappa$ als auch die Windung $\tau$ einer Kurve $C$ konstant, so ist $C$ eine gemeine Schraubenlinie (vgl. E, Aufg. 2) und es lassen sich unendlich viele Konstanten $\lambda$ und $\mu$ angeben, so daß die Gleichung (31) erfüllt ist. Somit gibt es hier unendlich viele Kurven $\bar{C}$, die mit $C$ zusammen ein Bertrand-

paar bilden. Sie sind die Schnittkurven der mit $C$ koaxsialen Zylinder mit der Hauptnormalenfläche von $C$.

**D. Evolventen und Evoluten.** Die orthogonalen Trajektorien $\bar{C}$ der Erzeugenden der Tangentenfläche einer Raumkurve $C$ heißen *Filarevolventen* von $C$, und umgekehrt nennt man $C$ *eine Filarevolute* jeder solchen Kurve $\bar{C}$. Jeder Punkt eines um $C$ gelegten gespannten undehnbaren Fadens beschreibt beim Abwickeln von $C$ eine Filarevolvente.[1]) Für den Ortsvektor von $\bar{C}$ können wir, wenn $C$ wie gewöhnlich durch

$$x_i = x_i(s) \tag{39}$$

gegeben ist, den Ansatz machen

$$\bar{x}_i = x_i - \lambda \xi_i. \tag{40}$$

Dabei muß
$$\frac{d\bar{x}_i}{ds} = \xi_i(1 - \lambda') - \varkappa\lambda\eta_i$$

auf $\xi_i$ senkrecht stehen, also $\lambda' = 1$ oder

$$\lambda = s + c$$

sein, wo $c$ eine willkürliche Konstante ist. Also ist

$$\bar{x}_i = x_i - (s + c)\,\xi_i \tag{41}$$

eine Parameterdarstellung der Filarevolventen von $C$.

Wir gehen an die Lösung der umgekehrten Aufgabe, die Filarevoluten $\tilde{C}$ einer Kurve $C$ zu bestimmen. Da die Tangenten von $\tilde{C}$ in den Normalebenen von $C$ liegen und $C$ schneiden müssen, können wir

$$\tilde{x}_i = x_i + a\eta_i + b\zeta_i \tag{42}$$

setzen und erhalten daraus durch Differentiation

$$\tilde{x}_i' = (1 - \varkappa a)\,\xi_i + (a' - \tau b)\,\eta_i + (a\tau + b')\,\zeta_i. \tag{43}$$

Nun soll voraussetzungsgemäß $\tilde{x}_i'$ parallel zu $\tilde{x}_i - x_i$ sein; also muß $1 - \varkappa a = 0$ oder

$$a = \frac{1}{\varkappa} \tag{44}$$

und

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' - \tau b & a\tau + b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\varkappa} & b \\ -\frac{\varkappa'}{\varkappa^2} - \tau b & \frac{\tau}{\varkappa} + b' \end{vmatrix} = \frac{1}{\varkappa^2}[\tau(1 + b^2\varkappa^2) + (b'\varkappa + b\varkappa')] = 0$$

oder
$$\tau = -\frac{b'\varkappa + b\varkappa'}{1 + \varkappa^2 b^2} = \frac{d}{ds}\operatorname{arc\,cot} b\varkappa$$

1) Die Abwicklung hat dabei selbstverständlich so vor sich zu gehen, daß der bereits von $C$ entfernte Teil des Fadens mit einer Tangente von $C$ zusammenfällt.

sein, woraus schließlich

$$b = \frac{1}{\varkappa} \cot(\varphi + \alpha) \tag{45}$$

mit konstantem $\alpha$ folgt, wenn wir zur Abkürzung

$$\varphi = \int_0^s \tau\, ds \tag{46}$$

setzen. Es ist also

$$\tilde{x}_i = x_i + \frac{1}{\varkappa}[\eta_i + \cot(\varphi + \alpha)\zeta_i] \tag{47}$$

die gesuchte Parameterdarstellung der Filarevoluten $\tilde{C}$ von $C$. Jede Kurve besitzt also $\infty^1$ Filarevoluten und ebensoviele Filarevolventen. Wie schon wiederholt benützt, ist der Tangentenvektor $\tilde{\xi}_i$ von $\tilde{C}$ parallel zu $\tilde{x}_i - x_i$. Wegen (47) ist

$$\tilde{\xi}_i = \eta_i \sin(\varphi + \alpha) + \zeta_i \cos(\varphi + \alpha). \tag{48}$$

Daraus folgt

$$\tilde{\xi}_i \zeta_i = \cos(\varphi + \alpha); \tag{49}$$

$\varphi + \alpha$ ist also der Winkel zwischen der Tangente der Filarevolute $\tilde{C}$ und der Binormalen von $C$. Daraus folgt: *Die Tangenten in entsprechenden Punkten zweier verschiedener Filarevoluten einer Kurve $C$ schneiden einander unter einem festen Winkel.* Oder: *Dreht man alle Erzeugenden einer Torse durch einen festen Winkel um eine orthogonale Trajektorie, so bleiben sie stets Erzeugende einer Torse.*

Ist $C$ eine ebene Kurve, so besitzt sie eine einzige ebene Evolute $\tilde{C}_0$, die zugleich der Ort der Krümmungsmittelpunkte (Hüllkurve der Normalen von $C$) ist. Die übrigen Evoluten sind Böschungslinien auf dem senkrecht über $\tilde{C}_0$ errichteten Zylinder (der die rektifizierende Fläche von $\tilde{C}_0$ ist).

Neben den Filarevolventen und -evoluten, die den Evolventen und Evoluten der ebenen Kurven entsprechen, gibt es bei Raumkurven noch die sogenannten *Planevolventen* und *Planevoluten.* Dabei versteht man unter einer Planevolvente einer Kurve $C$ irgendeine orthogonale Trajektorie der Schar der Schmiegebenen von $C$. Es gibt also $\infty^2$ Planevolventen zu jeder Raumkurve. Umgekehrt versteht man unter einer Planevolute $\bar{C}$ von $C$ eine Kurve, für die $C$ Planevolvente ist. Offenbar sind die Normalebenen von $C$ die Schmiegebenen von $\bar{C}$; also ist $\bar{C}$ die Polarkurve von $C$. Es gibt zu jeder Raumkurve also nur eine einzige Planevolute, die mit der Polarkurve von $C$ identisch ist.

**E. Einige Aufgaben.** 1. Man bestimme die Krümmung der Projektion einer Böschungslinie auf eine zu der festen Richtung $p_i$ senkrechte Ebene.

2. Man zeige, daß die Konstanz von $\varkappa$ und $\tau$ auch hinreichend für gemeine Schraubenlinien ist. Man benütze die Lösung der ersten Aufgabe und den Satz über die Polarkurven konstanter Krümmung aus C.

3. Man zeige, daß die Tangentenfläche der Raumkurve $x_i = a_i t^i + b_i$ (nicht summieren über $i$, $t^i$ ist hier die $i$te Potenz von $t$) von jeder Schmiegebene in einer Parabel geschnitten wird.

4. Man charakterisiere die geodätischen Linien auf einem Kegel durch eine Relation zwischen $\varkappa$ und $\tau$. Man benütze dabei die Tatsache, daß die rektifizierenden Ebenen dieser Kurve durch einen Punkt gehen müssen. Die Lösung ist $\frac{\tau}{\varkappa} = as + b$, wo $a$ und $b$ willkürliche Konstante sind. Für $a = 0$ erhält man die Böschungslinien. (Warum?)

5. Rollt[1]) eine Ebene so längs einer Raumkurve $C$, daß sie in jeder Lage Schmiegebene von $C$ ist, so beschreibt jeder Punkt der Ebene eine Planevolvente von $C$.

6. Man zeige, daß alle sphärischen Kurven konstanter Krümmung Kreise sind.

7. Man berechne Krümmung und Windung der Kurven (3, 1), (3, 2) und (3, 3) und zeige, daß sie der Differentialgleichung (4, 19) genügen.

---

1) Damit soll ausgedrückt werden, daß die Ebene *nicht* längs $C$ *gleitet*.

# III. Die erste Grundform einer Fläche.

## § 1. Darstellung der Flächen. Koordinaten auf einer Fläche.

Es seien die drei Koordinaten eines Punktes $P$ jetzt in einem Bereich $B$ der $u_1 u_2$-Ebene definierte, eindeutige und $\varrho$ mal stetig differenzierbare Funktionen

$$x_i = x_i(u_1, u_2) \tag{1}$$

der beiden unabhängigen Veränderlichen oder Parameter $u_1$ und $u_2$. Funktionen und Parameter sind, wo nicht ausdrücklich anders angegeben, stets als reell vorausgesetzt. Wie in Abschnitt II ist die natürliche Zahl $\varrho$ stets so anzunehmen, daß alle bei der gerade behandelten Aufgabe vorkommenden Ableitungen existieren und stetig sind. Denken wir uns die eine der beiden Veränderlichen, etwa $u_1$ festgehalten, so wird der Punkt $P$ beim Variieren von $u_2$ eine Kurve beschreiben, die wir eine *Kurve* $u_1 =$ *konst.*, eine $u_2$-*Kurve* oder noch kürzer eine 2-*Kurve* nennen wollen. Geben wir $u_1$ einen anderen Wert, so werden wir — wenigstens im allgemeinen — derartig auch eine andere 2-Kurve bekommen, und wenn wir der Veränderlichen $u_1$ nach und nach alle Werte des Definitionsbereiches erteilen, so erhalten wir eine Schar von 2-Kurven, die eine Fläche oder genauer ein Flächenstück erfüllen. Halten wir umgekehrt $u_2$ fest, so erhalten wir eine *Kurve* $u_2 =$ *konst.* oder eine 1-*Kurve* und für alle Werte von $u_2$ des Definitionsbereiches eine Schar von 1-Kurven, die offenbar dasselbe Flächenstück erfüllen. Es kann aber vorkommen, daß sich z. B. für verschiedene Werte von $u_1$ immer dieselbe 2-Kurve ergibt und umgekehrt, d. h., daß (1) die Parameterdarstellung einer Kurve, nicht einer Fläche ist. Das tritt offenbar dann ein, wenn die $x_i$ zusammengesetzte Funktionen von der Form $f_i(t(u_1, u_2))$ sind, also eigentlich nur von einer Veränderlichen $t$ abhängen. Betrachten wir einmal einen Punkt $P$ mit den Koordinaten $x_i$, der vermöge (1) einem Wertepaar $u_1, u_2$ zugeordnet ist. Durch diesen Punkt geht je eine 1- und 2-Kurve, die bestimmt nicht zusammenfallen, wenn die Richtungen ihrer Tangenten verschieden sind. Diese Richtungen sind aber durch die Vektoren $\frac{\partial x_i}{\partial u_1}$ und $\frac{\partial x_i}{\partial u_2}$ gegeben, und sind verschieden, wenn diese Vektoren voneinander linear unabhängig sind, eine Bedingung, die wir nach I, § 5 in der Form

$$\varepsilon_{ikl} \frac{\partial x_k}{\partial u_1} \frac{\partial x_l}{\partial u_2} \neq 0 \tag{2}$$

schreiben können. Solange es sich in (1) um reelle Funktionen handelt, können wir (2) auch durch

$$(3)\qquad \varepsilon_{ikl}\frac{\partial x_k}{\partial u_1}\frac{\partial x_l}{\partial u_2}\cdot\varepsilon_{ijh}\frac{\partial x_j}{\partial u_1}\frac{\partial x_h}{\partial u_2}=\frac{\partial x_i}{\partial u_1}\frac{\partial x_i}{\partial u_1}\frac{\partial x_k}{\partial u_2}\frac{\partial x_k}{\partial u_2}-\left(\frac{\partial x_i}{\partial u_1}\frac{\partial x_i}{\partial u_2}\right)^2\neq 0$$

ersetzen. Denn bei reellen Vektoren folgt aus dem Verschwinden der Länge das Verschwinden aller Komponenten. Wir wollen also in Hinkunft von unseren Funktionen (1) noch voraussetzen, daß sie für alle $u_1, u_2$ des Definitionsbereiches der Bedingung (2) oder (3) genügen. Nur dann sind wir sicher, daß (1) tatsächlich ein Gebilde darstellt, das wir in Übereinstimmung mit der anschaulichen Vorstellung als Fläche bezeichnen können.

Die beiden Veränderlichen $u_1$ und $u_2$ können wir als *Koordinaten* auf der Fläche ansehen, in einer weitgehenden, aber naheliegenden Verallgemeinerung des Koordinatenbegriffs der Elementargeometrie, wo man sich in der Regel auf rechtwinklige kartesische Koordinaten der Ebene oder des Raumes beschränkt. Das Wesentliche, was unseren allgemeinen Koordinaten auf einer Fläche und den kartesischen Koordinaten in der Ebene gemeinsam ist, das ist die Charakterisierung der einzelnen Punkte durch Zahlenpaare und die Existenz von zwei Kurvenscharen, von denen jede die Fläche (Ebene) schlicht überdeckt, so daß durch jeden Punkt eine und nur eine Kurve aus jeder Schar hindurchgeht. Zwei solche Kurvenscharen zusammen bezeichnet man als *Kurvennetz*.

So wie der eine Parameter bei den Kurven sind hier die beiden Parameter in (1) in weiten Grenzen willkürlich wählbar. Führen wir durch[1])

$$(4)\qquad u_\alpha=\varphi_\alpha(\bar u_1,\bar u_2)$$

neue Parameter ein, so werden wir verlangen müssen, daß die inverse Transformation

$$(5)\qquad \bar u_\alpha=\psi_\alpha(u_1,u_2)$$

existiert, und daß die vier Funktionen $\varphi_\alpha$ und $\psi_\alpha$ eindeutig stetig, und $m$ mal stetig differenzierbar sind[2]), wo $m\geqq\varrho$, jedenfalls aber $m\geqq 1$ ist.

1) So wie lateinische Indizes stets die Repräsentanten der drei Zahlen 1, 2, 3 waren und auch weiterhin bleiben, so sollen von nun an griechische Indizes stets Repräsentanten der zwei Zahlen 1, 2 sein. Auch die griechischen Indizes sollen der Summationsvorschrift unterliegen, d. h. über doppelt vorkommende griechische Indizes ist stets von 1 bis 2 (über lateinische von 1 bis 3) zu summieren.

2) Diese Entwicklungen laufen parallel zu denen von I, § 1, so daß wir uns hier kurz fassen können.

Aus (4) und (5) folgen die Identitäten

$$(6) \qquad u_\alpha \equiv \varphi_\alpha(\psi_1, \psi_2) \quad \text{und} \quad \bar{u}_\alpha \equiv \psi_\alpha(\varphi_1, \varphi_2);$$

aus der ersten ergibt sich durch Differentiation

$$(7) \qquad \frac{\partial u_\alpha}{\partial \bar{u}_\varkappa} \frac{\partial \bar{u}_\varkappa}{\partial u_\beta} = \delta_{\alpha\beta},$$

wo die $\delta_{\alpha\beta}$ so wie früher die $\delta_{ik}$ erklärt sind ($= 1$ oder $= 0$, je nachdem die beiden Indizes gleich oder verschieden sind). Wegen (7) ist

$$(8) \qquad \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(\bar{u}_1, \bar{u}_2)} \cdot \frac{\partial(\bar{u}_1, \bar{u}_2)}{\partial(u_1, u_2)} = 1,$$

wo

$$(9) \qquad \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(\bar{u}_1, \bar{u}_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_1} & \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_1} & \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_2} \end{vmatrix}$$

die Funktionaldeterminate der Funktionen (4) und analog $\frac{\partial(\bar{u}_1, \bar{u}_2)}{\partial(u_1, u_2)}$ die der Funktionen (5) ist. Beide sind wegen $m \geqq 1$ stetige Funktionen der $u_\alpha$; daraus folgt aber, daß keine verschwinden kann, da sonst nach (8) die andere unendlich und somit nicht stetig wäre. Wir nehmen nun an, daß bloß die Funktionen (4) $m$ mal stetig differenzierbar sind, daß die inverse Transformation existiert, differenzierbar ist, und daß

$$(10) \qquad \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(\bar{u}_1, \bar{u}_2)} \neq 0$$

ist. Dann folgt aber sofort aus (7) die Stetigkeit der $\frac{\partial \bar{u}_\varkappa}{\partial u_\beta}$. Ist $m \geqq 2$, so sind die aus (7) berechneten $\frac{\partial \bar{u}_\varkappa}{\partial u_\beta}$ stetig differenzierbar. Durch nochmalige Differentiation nach $u_\gamma$ folgt dann aus (7)

$$\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \bar{u}_\varkappa \partial \bar{u}_\lambda} \frac{\partial \bar{u}_\varkappa}{\partial u_\beta} \frac{\partial \bar{u}_\lambda}{\partial u_\gamma} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \bar{u}_\varkappa} \frac{\partial^2 \bar{u}_\varkappa}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} = 0;$$

wegen (10) kann man daraus die $\frac{\partial^2 \bar{u}_\varkappa}{\partial u_\beta \partial u_\gamma}$ berechnen usw.

*Transformationen* (4) *mit diesen Eigenschaften (d. h. mit m-mal stetig differenzierbaren Funktionen $\varphi_\alpha(u_1, u_2)$, mit Existenz und Differenzierbarkeit der inversen Transformation* (5) *und mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante) nennen wir **zulässige Transformationen** und die durch sie eingeführten Parameter **zulässige Parameter**.* Aus dem Vorhergehenden folgt, daß dann auch die inverse Transformation $\bar{u}_\alpha = \psi_\alpha(u_1, u_2)$ $m$ mal stetig diffe-

renzierbar ist. Auf derartige zulässige Parameter oder *Koordinaten auf der Fläche* wollen wir uns im folgenden beschränken.

In speziellen Fällen sind andere Darstellungen einer Fläche als die Parameterdarstellung zweckmäßig. Die einfachste Darstellung in der Form

$$x_3 = f(x_1, x_2) \tag{11}$$

ist nur ein Sonderfall von (1); man braucht nur statt (11)

$$x_1 = u_1, \quad x_2 = u_2, \quad x_3 = f(u_1, u_2) \tag{12}$$

zu schreiben, um das einzusehen. Die Parameterkurven sind hier jene, die bei orthogonaler Projektion in die $x_1 x_2$-Ebene das Netz der Parallelgeraden $x_1 =$ konst., $x_2 =$ konst. geben. Zylinder, deren Erzeugende zur $x_3$-Achse parallel sind, sind von der Darstellung in der Form (11) offenbar ausgeschlossen.

Die implizite Darstellung

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{13}$$

schließlich ist, wenn sie auch auf den ersten Blick einfacher erscheinen mag, doch bei der Behandlung allgemeiner Probleme meist weniger zweckmäßig, als die Parameterdarstellung (1).

## § 2. Die erste Grundform. Normalenvektor und Tangentenebene.

Es sei durch

$$u_\alpha = u_\alpha(t) \tag{1}$$

eine Kurve auf der Fläche

$$x_i = x_i(u_1, u_2) \tag{2}$$

gegeben. Von den $u_\alpha(t)$ ist dabei angenommen, daß sie stetig und mindestens einmal stetig differenzierbar sind, und daß eine Teilmenge ihrer Ordinatenmengen im Definitionsbereich $B$ der Funktionen (2) liegt. Die unabhängige Veränderliche $t$ sei auf ein solches Intervall beschränkt, daß kein Funktionswert $u_\alpha(t)$ außerhalb von $B$ liegt. Die Zahl $\varrho$ (§ 1) nehmen wir $\geqq 1$ an, d. h. die Funktionen (2) mindestens einmal stetig differenzierbar. Unter diesen Annahmen erhält man durch Einsetzen von (1) in (2)

$$x_i = x_i\big(u_1(t), u_2(t)\big) = \varphi_i(t), \tag{3}$$

also in der Tat eine Kurve in Parameterdarstellung, wie wir sie in II, § 1 betrachtet haben. Für das Quadrat des Bogenelementes der Kurve ergibt sich nach (II, 1, 8)

$$ds^2 = dx_i dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} du_\alpha du_\beta, \tag{4}$$

da ja

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} du_\alpha = \frac{\partial x_i}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x_i}{\partial u_2} du_2 \tag{5}$$

ist. Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} = g_{\alpha\beta}, \tag{6}$$

so folgt aus (4)

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} du_\alpha du_\beta \tag{7}$$

oder ausführlicher

$$ds^2 = g_{11} du_1^2 + 2 g_{12} du_1 du_2 + g_{22} du_2^2.$$

Sehr gebräuchlich ist die Bezeichnungsweise

$$g_{11} = E, \quad g_{12} = g_{21} = F, \quad g_{22} = G, \tag{8}$$

die noch von Gauss herrührt. Aus (6) erkennt man, daß $g_{11}$ das Quadrat der Länge des Vektors $\frac{\partial x_i}{\partial u_1}$, $g_{22}$ das Quadrat der Länge des Vektors $\frac{\partial x_i}{\partial u_2}$ und $g_{12}$ das innere Produkt dieser beiden Vektoren ist, so daß für den Winkel $\vartheta$ der Parameterlinien in einem Punkt $P$ $(u_1, u_2)$

$$\cos\vartheta = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \tag{9}$$

gilt. $g_{11}$ und $g_{22}$ sind stets positiv.

Die binäre quadratische Differentialform (7) heißt die *erste Grundform* der Flächentheorie. Quadriert man (9), so ergibt sich

$$\cos^2\vartheta = \frac{g_{12}^2}{g_{11} g_{22}} \leqq 1$$

oder

$$g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 \geqq 0. \tag{10}$$

Dabei ist $g$ die *Diskriminante der quadratischen Form* (7). Andrerseits läßt sich aber wegen (6) die Bedingung (1, 3) auch in der Form

$$g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 \neq 0 \tag{11}$$

schreiben, was zusammen mit (10)

$$g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 > 0 \tag{12}$$

gibt; da auch $g_{11} > 0$ ist, ist *die Form* (7) *positiv definit*, wie es ja auch nach der Bedeutung (*Quadrat* des Bogenelementes) sein muß.[1])

1) Es ist $$ds^2 = \frac{1}{g_{11}} [(g_{11} du_1 + g_{12} du_2)^2 + (g_{11} g_{22} - g_{12}^2) du_2^2],$$

d. h. die Gleichung $ds^2 = 0$ hat keine reellen Wurzeln. Daher nimmt $ds^2$ nur Werte eines Vorzeichens an und die Form ist *definit*; da sie im Sonderfall $du_2 = 0$ wegen $g_{11} > 0$ positiv

Aus (9) folgt insbesondere noch, daß *die Parameterlinien einander rechtwinklig schneiden,* wenn

(13) $$g_{12} = 0$$

ist.

Erwähnt sei ferner, daß die Koeffizienten $g_{\alpha\beta}$ der ersten Grundform nach ihrer Bedeutung Bewegungsinvarianten sind. Dagegen sind sie nicht invariant gegenüber (zulässigen) Parametertransformationen. Sei

(14) $$u_\alpha = u_\alpha(\bar{u}_1, \bar{u}_2); \quad \bar{u}_\alpha = \bar{u}_\alpha(u_1, u_2)$$

---

ist, ist dieses Vorzeichen $+1$, die Form also *positiv definit.* Aus $g = 0$ folgt übrigens wegen (9) $\cos\vartheta = \pm 1$, also $\vartheta = 0$ oder $= \pi$, und somit gerade der Fall linearer Abhängigkeit der Vektoren $\frac{\partial x_i}{\partial u_1}$ und $\frac{\partial x_i}{\partial u_2}$, den wir in § 1 ausdrücklich durch die Bedingung (1, 2) oder (1, 3) ausgeschlossen haben. (Vgl. auch die Fußnote auf S. 101.)

Was das Verschwinden der Diskriminante $g$ in einzelnen Punkten reeller Flächen bedeutet, wollen wir uns noch an zwei Beispielen klar machen. Nehmen wir zunächst die Kugel

$$x_1 = a\cos u_1 \cos u_2, \quad x_2 = a \sin u_1 \cos u_2, \quad x_3 = a \sin u_2,$$

wo die Kurven $u_1 =$ konst. Hauptkreise durch die Endpunkte eines festen Durchmessers (Längenkreise) und die Kurven $u_2 =$ konst. Kreise sind, deren Ebenen auf dem erwähnten Durchmesser senkrecht stehen (Breitenkreise). $u_1$ und $u_2$ sind also (geographische) „Länge" und „Breite" auf der Kugel; die Endpunkte (0, 0, 1) und (0, 0, — 1) des erwähnten Durchmessers „Nordpol" und „Südpol". Man erhält

$$g_{11} = a^2, \; g_{12} = 0, \; g_{22} = a^2\cos^2 u_2, \quad \text{also} \quad g = a^4\cos^2 u_2.$$

Die Diskriminante $g$ verschwindet für $u_2 = \pm\frac{\pi}{2}$, d. h. in den Polen. Man erkennt, daß dort mit den Parametern etwas nicht in Ordnung ist. Durch jeden Pol gehen alle Kurven $u_1 =$ konst., aber keine einzige Kurve $u_2 =$ konst., da ja $u_2 = \pm\frac{\pi}{2}$ keine Kurve, sondern je einen Punkt liefert.

Ein anderes Beispiel gibt der Kegel

$$x_1 = u_1^2, \quad x_2 = u_1 u_2, \quad x_3 = u_2^2.$$

Es wird $$g_{11} = 4u_1^2 + u_2^2, \quad g_{12} = u_1 u_2, \quad g_{22} = u_1^2 + 4u_2^2$$

und somit $$g = 4(u_1^4 + 4u_1^2 u_2^2 + u_2^4);$$

$g$ verschwindet also für $u_1 = u_2 = 0$, d. h. im Scheitel des Kegels. Daß in singulären Punkten einer Fläche, wie z. B. eben im Scheitel eines Kegels, die Parameterdarstellung eine Irregular tät aufweisen wird, war schließlich vorauszusehen; das erste Beispiel zeigt aber, daß etwas derartiges auch in durchaus regulären Flächenpunkten — die beiden Pole sind ja rein geometrisch auf der Kugel in keiner Weise ausgezeichnet — vorkommen kann. Man spricht in diesem Fall von *Singularitäten der Parameter,* zum Unterschied von der *Flächensingularität* des Kegels im zweiten Beispiel.

eine solche; ist dann

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta}\, d\bar{u}_\alpha\, d\bar{u}_\beta \tag{15}$$

die erste Grundform in den neuen Parametern, so folgt

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_i}{\partial \bar{u}_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial \bar{u}_\beta} = \frac{\partial x_i}{\partial u_\varkappa}\frac{\partial u_\varkappa}{\partial \bar{u}_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial u_\lambda}\frac{\partial u_\lambda}{\partial \bar{u}_\beta},$$

oder wegen (6)

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\varkappa\lambda}\frac{\partial u_\varkappa}{\partial \bar{u}_\alpha}\frac{\partial u_\lambda}{\partial \bar{u}_\beta}, \tag{16}$$

und umgekehrt

$$g_{\varkappa\lambda} = \bar{g}_{\alpha\beta}\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial u_\varkappa}\frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial u_\lambda}. \tag{17}$$

Man beachte, daß sich (17) aus (16) *formal* einfach durch Multiplikation mit dem symbolischen Faktor $\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial u_\varkappa}\frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial u_\lambda}$ ergibt, was natürlich nur als ein Vorteil unserer abgekürzten Schreibweise zu werten ist. Rechnerisch erhält man (17) aus (16), indem man die letztere Gleichung mit $\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial u_\mu}\frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial u_\nu}$ multipliziert und über $\alpha$ und $\beta$ summiert; es folgt

$$\bar{g}_{\alpha\beta}\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial u_\mu}\frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial u_\nu} = g_{\varkappa\lambda}\frac{\partial u_\varkappa}{\partial \bar{u}_\alpha}\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial u_\mu}\frac{\partial u_\lambda}{\partial \bar{u}_\beta}\frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial u_\nu} = g_{\varkappa\lambda}\delta_{\varkappa\mu}\delta_{\lambda\nu} = g_{\mu\nu};$$

ersetzt man hier noch $\mu$ und $\nu$ bzw. durch $\varkappa$ und $\lambda$, so kommt man genau zu (17). Wegen

$$d\bar{u}_\alpha = \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial u_\varkappa}\, du_\varkappa \tag{18}$$

ist aber

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta}\, d\bar{u}_\alpha\, d\bar{u}_\beta = \bar{g}_{\alpha\beta}\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial u_\varkappa}\frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial u_\lambda}\, du_\varkappa\, du_\lambda = g_{\alpha\beta}\, du_\alpha\, du_\beta = ds^2,$$

womit die — wegen (4) selbstverständliche — Tatsache bestätigt ist, daß das Bogenelement einer Flächenkurve gegenüber (zulässigen) Parametertransformationen invariant ist.

Wir suchen noch Aufschluß über das Verhalten der Diskriminante $g$ bei zulässigen Parametertransformationen. Es ist zunächst

$$\bar{g} = \bar{g}_{11}\bar{g}_{22} - \bar{g}_{12}^2 = g_{\varkappa\lambda}g_{\mu\nu}\frac{\partial u_\varkappa}{\partial \bar{u}_1}\frac{\partial u_\nu}{\partial \bar{u}_2}\left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial \bar{u}_1}\frac{\partial u_\mu}{\partial \bar{u}_2} - \frac{\partial u_\lambda}{\partial \bar{u}_2}\frac{\partial u_\mu}{\partial \bar{u}_1}\right).$$

Der Klammerausdruck ist stets Null, wenn $\lambda = \mu$ ist, so daß nur entweder $\lambda = 1$, $\mu = 2$, oder $\lambda = 2$, $\mu = 1$ sein kann. Es folgt also

$$g = (g_{\varkappa 1}g_{2\nu} - g_{\varkappa 2}g_{1\nu})\frac{\partial u_\varkappa}{\partial \bar{u}_1}\frac{\partial u_\nu}{\partial \bar{u}_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_1}\frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_2} - \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_2}\frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_1}\right).$$

Hier ist die erste Klammer für $\varkappa = \nu$ stets Null, so daß wieder nur $\varkappa = 1$, $\nu = 2$ oder $\varkappa = 2$, $\nu = 1$ sein kann. Daraus ergibt sich unmittelbar

$$\bar{g} = g\left[\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(\bar{u}_1, \bar{u}_2)}\right]^2. \tag{19}$$

Die Richtung der Tangente unserer Flächenkurve (1) ist durch den Vektor

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}\frac{du_\alpha}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial x_i}{\partial u_2}\frac{du_2}{dt} \tag{20}$$

gegeben. Er ist somit linear abhängig von den Vektoren

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_1} \text{ und } \frac{\partial x_i}{\partial u_2}, \tag{21}$$

die die Richtungen der Tangenten an die Parameterkurven angeben; d. h. der Vektor (20) liegt in der durch die Vektoren (21) bestimmten Ebene. Das muß aber offenbar von *allen* Flächenkurven gelten, die nur durch den gerade betrachteten Punkt $P$ mit den Koordinaten $u_1, u_2$ hindurchgehen. Wir nennen diese Ebene als Ort der Tangenten aller Flächenkurven in $P$ die *Tangentenebene* der Fläche in $P$. Ihre Gleichung ist somit in laufenden Koordinaten $z_i$

$$\varepsilon_{ikl}(z_i - x_i)\frac{\partial x_k}{\partial u_1}\frac{\partial x_l}{\partial u_2} = 0; \tag{22}$$

die zu ihr oder, wie wir sagen wollen, zu der Fläche im Punkt $P$ senkrechte Richtung ist durch den Vektor

$$\varepsilon_{ikl}\frac{\partial x_k}{\partial u_1}\frac{\partial x_l}{\partial u_2} \tag{23}$$

gegeben; den Einheitsvektor dieser Richtung bezeichnen wir mit $\nu_i$ und nennen ihn den *Normalenvektor* der Fläche. Wegen (1, 3) und (6) ist das Quadrat der Länge von (23) gleich der Diskriminante $g$ der ersten Grundform und somit

$$\nu_i = \frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon_{ikl}\frac{\partial x_k}{\partial u_1}\frac{\partial x_l}{\partial u_2}. \tag{24}$$

Die Orientierung des Normalenvektors hängt somit von der Wahl des Vorzeichens von $\sqrt{g}$ und von der Numerierung der Parameter ab; ist darüber eine Entscheidung getroffen, so heißt die Fläche *orientiert*.[1])

1) Vgl. die analoge Festsetzung über die Orientierung von Ebenen in I, § 6 A. Während aber die Orientierung einer Ebene sich über die ganze Ebene ausdehnen läßt (mit Ausschluß der uneigentlichen Geraden), gilt dies bei Flächen im allgemeinen nicht, d. h. es gibt Flächen, die in ihrer Gesamtausdehnung nicht orientierbar sind (die sog. *einseitigen Flächen*; das bekannteste Beispiel ist das Möbiussche Band, Fig. 7). Genügend kleine Flächenstücke sind aber stets orientierbar; der Begriff der einseitigen Flächen gehört nicht zur Differentialgeometrie im engeren Sinn (vgl. I, § 2).

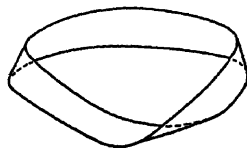



Fig. 7.

Wie schon erwähnt, sind bei reellen Flächen die beiden Bedingungen (1, 2) und (1, 3) gleichbedeutend. Auf imaginären Flächen kann jedoch (1, 2) erfüllt sein, ohne daß (1, 3) gilt; insbesondere kann auch die linke Seite von (1, 3), d. h. die Diskriminante $g$ der ersten Grundform verschwinden. Aus (22) erkennen wir dann, daß *die Tangentenebenen in den Punkten mit* $g = 0$ *isotrope Ebenen* sind. Ist auf der ganzen Fläche $g = 0$, so sind alle Tangentenebenen isotrop; da es im Raum nur $\infty^2$ isotrope Ebenen gibt (vgl. I, § 6), besitzt eine solche Fläche, wenn sie nicht in den absoluten Kegelschnitt ausartet (vgl. § 8 E), stets nur $\infty^1$ Tangentenebenen, d. h. sie ist eine Torse mit isotropen Erzeugenden.

## § 3. Vektoren auf der Fläche.

Wir betrachten wieder die beiden, von einem Flächenpunkt $P$ ausgehenden Vektoren

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial x_i}{\partial u_2}, \tag{1}$$

deren Längen bzw. $\sqrt{g_{11}}$ und $\sqrt{g_{22}}$ sind, sowie einen weiteren Vektor mit dem Anfangspunkt $P$, der in der Tangentenebene in $P$ liegt. Derartige Vektoren, die tangential zu unserer Fläche liegen, nennen wir Vektoren auf der Fläche oder *Flächenvektoren*. Wir können uns jeden solchen Vektor als Tangentenvektor

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}\frac{du_\alpha}{dt} \tag{2}$$

einer Flächenkurve $u_\alpha = u_\alpha(t)$ gegeben denken, wobei wir die Bezeichnung „Tangentenvektor" aber nicht mehr wie in II, § 1 nur für den Einheitsvektor in der Tangentenrichtung verwenden. Aus (2) erkennt man, daß jeder Flächenvektor mit dem Anfangspunkt $P$ durch die Angabe von zwei Zahlen

$$\lambda^\alpha = \frac{du_\alpha}{dt} \tag{3}$$

festgelegt ist und daß auch umgekehrt jeder Flächenvektor mit dem Anfangspunkt $P$ eindeutig zwei solche Zahlen bestimmt. Wir können also diese zwei Zahlen zusammen mit den Parameterwerten oder Koordinaten $u_\alpha$ des Anfangspunktes[1]) als Bestimmungsstücke des Flächenvektors ansehen und nennen sie seine *kontravarianten Komponenten*. Um uns bequemer ausdrücken zu können, denken wir uns in der Tangentenebene des Punktes $P$ ein schiefwinkliges (affines) Koordinatensystem (Fig. 8) mit den beiden Vektoren (1) als Maßvektoren (Einheitsvektoren in den Koordinatenachsen) gegeben. Die kontravarianten Komponenten eines Vektors sind dann die in diesen Einheiten

1) Es handelt sich hier also um *gebundene* Vektoren in der Redeweise von I, § 4.

(nämlich $\sqrt{g_{11}}$ und $\sqrt{g_{22}}$ in der Metrik des euklidischen Raumes) gemessenen Parallelprojektionen des Vektors auf die beiden Achsen. Die kontravarianten Komponenten der Maßvektoren haben offenbar die Werte (1, 0) und (0, 1). In der Tat ist z. B. das Quadrat der Länge der parallel zur zweiten Richtung (1) genommenen Projektion von (2) in die erste Richtung (1) gleich

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_1}\frac{\partial x_i}{\partial u_1}\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 = g_{11}(\lambda^1)^2,$$

also ist $\lambda^1$ gleich der $\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}$ fachen Länge dieser Projektion. Wir wollen übereinkommen, die Indizes kontravarianter Vektorkomponenten stets rechts oben anzusetzen.[1])

Fig. 8.

Ein Flächenvektor (2) mit dem Anfangspunkt $P$ läßt sich aber auch noch in anderer Weise durch zwei Zahlen festlegen, z. B. durch die Längen seiner orthogonalen Projektionen auf die Achsen unseres schiefwinkligen Koordinatensystems. Dabei werden wir allerdings sofort sehen, daß es der Einfachheit halber zweckmäßig ist, diese Längen nicht in der Maßeinheit unseres euklidischen Raumes, auch nicht in den eben benützten zu messen, sondern bzw. mit den Maßeinheiten $\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}$ und $\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}$. Für die orthogonale Projektion von (2) in die Richtung $\frac{\partial x_i}{\partial u_\beta}$ erhalten wir dann[2])

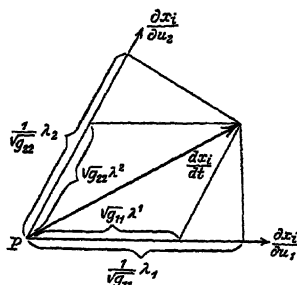
$$\frac{dx_i}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} = \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}\frac{du_\alpha}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} = g_{\alpha\beta}\frac{du_\alpha}{dt} = g_{\alpha\beta}\lambda^\alpha. \tag{4}$$

Wir setzen

$$g_{\alpha\beta}\lambda^\alpha = \lambda_\beta \tag{5}$$

und nennen die $\lambda_\beta$ *kovariante Komponenten* des Vektors (2). Die Indizes kovarianter Vektorkomponenten wollen wir immer rechts unten ansetzen.

Ein Flächenvektor ist also stets durch *vier* Bestimmungsstücke festgelegt; die beiden ersten sind die Koordinaten $u_\alpha$ seines Anfangspunktes, die beiden anderen sind entweder seine kontravarianten oder seine kovarianten Komponenten, wobei die letzteren mit den ersteren durch die linearen homogenen

---

1) Wo Verwechslungen mit Potenzen zu befürchten sind, wird im folgenden bei diesen die Basis eingeklammert. Vgl. z. B. (16), (18), (19).

2) In der Metrik des euklidischen Raumes ist diese Projektion gleich

$$\frac{dx_i}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial u_\beta}\frac{1}{\sqrt{g_{\beta\beta}}} \qquad \text{(nicht summieren über } \beta\text{!).}$$

Gleichungen (5) zusammenhängen. Da in allen von uns betrachteten Flächenpunkten die Diskriminante $g$ der ersten Grundform von Null verschieden ist und die Gleichungsdeterminante von (5) mit $g$ übereinstimmt, können wir (5) eindeutig nach den $\lambda^\alpha$ auflösen und erhalten

$$\lambda^\alpha = g^{\alpha\beta}\lambda_\beta. \tag{6}$$

Dabei ist $g^{\alpha\beta}$ das durch $g$ dividierte algebraische Komplement von $g_{\alpha\beta}$ in der Matrix $\begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{Vmatrix}$, also

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{21}}{g} = -\frac{g_{12}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g}. \tag{7}$$

Setzt man (6) in (5) ein, wobei in (6) statt $\beta$ etwa $\gamma$ zu schreiben ist, so folgt $g_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\gamma}\lambda_\gamma = \lambda_\beta$ für beliebige $\lambda_\alpha$; es muß also

$$g_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\gamma} = \delta^\gamma_\beta \tag{8}$$

sein, wobei die $\delta^\gamma_\beta$ dasselbe wie die oft verwendeten Größen $\delta_{\beta\gamma}$ bedeuten, nämlich gleich Null oder gleich Eins sind, je nachdem $\beta \neq \gamma$ oder $\beta = \gamma$ ist. Die Relation (8), die wegen der Symmetrie der $g_{\alpha\beta}$ und $g^{\alpha\beta}$ auch $g_{\alpha\beta}\, g^{\gamma\alpha} = \delta^\gamma_\beta$ oder $g_{\beta\alpha}\, g^{\gamma\alpha} = \delta^\gamma_\beta$ geschrieben werden kann, ist auch unmittelbar aus (7) zu bestätigen.

Da wir im folgenden häufig sowohl mit den kovarianten als auch mit den kontravarianten Komponenten eines und desselben Vektors rechnen werden, sprechen wir auch kurz von einem *Vektor $\lambda$ eines Punktes schlechthin*, dessen Komponenten dann entweder mit $\lambda_\alpha$ oder mit $\lambda^\alpha$ bezeichnet werden.

Wir denken uns nun an Stelle der Parameter oder Koordinaten $u_\alpha$ durch eine zulässige Transformation $u_\alpha = u_\alpha(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ andere eingeführt. Die Gleichungen $\frac{\partial x_i}{\partial \bar{u}_\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial u_\beta}\frac{\partial u_\beta}{\partial \bar{u}_\alpha}$ geben uns an, daß an Stelle der von uns als Maßvektoren verwendeten Vektoren (1) andere, von diesen linear abhängige Vektoren treten. Der Vektor (2) selbst muß aber bei einer Parametertransformation in sich übergeführt werden, d. h. es muß

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial \bar{u}_\alpha}\frac{d\bar{u}_\alpha}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial u_\beta}\frac{du_\beta}{dt} \tag{9}$$

sein und somit

$$\frac{du_\beta}{dt} = \frac{\partial u_\beta}{\partial \bar{u}_\alpha}\frac{d\bar{u}_\alpha}{dt}, \quad \frac{d\bar{u}_\alpha}{dt} = \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial u_\beta}\frac{du_\beta}{dt} \tag{10}$$

gelten, was nichts anderes als die Kettenregel ist. Die kontravarianten Komponenten eines Flächenvektors transformieren sich also nach dem Gesetz

$$\lambda^\beta = \frac{\partial u_\beta}{\partial \bar{u}_\alpha}\bar{\lambda}^\alpha, \quad \bar{\lambda}^\alpha = \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial u_\beta}\lambda^\beta \tag{11}$$

und umgekehrt gilt, daß je zwei in einem Flächenpunkt $P$ definierte Zahlen $\lambda^\alpha$ die kontravarianten Komponenten eines Vektors sind, wenn sie sich beim Übergang zu anderen Parametern nach dem Gesetz (11) transformieren. Da die kontravarianten Vektorkomponenten nichts anderes als die Koordinaten des Endpunktes des Vektors in unserem affinen Koordinatensystem sind, sagen die Gleichungen (11), daß die Parametertransformation eine zentroaffine Transformation in der Tangentenebene induziert, deren Transformationsdeterminante mit der Funktionaldeterminante der Parametertransformation übereinstimmt, also bei allen zulässigen Parametertransformationen sicher von Null verschieden ist.

Das Transformationsgesetz der kovarianten Komponenten ergibt sich leicht aus (5), (11) und (2, 16). Wegen

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial \bar{u}_\beta}\frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial u_\mu} = \delta_{\lambda\mu}$$

folgt

$$\bar{\lambda}_\alpha = \bar{g}_{\alpha\beta}\bar{\lambda}^\beta = g_{\varkappa\lambda}\frac{\partial u_\varkappa}{\partial \bar{u}_\alpha}\frac{\partial u_\lambda}{\partial \bar{u}_\beta}\lambda^\mu\frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial u_\mu} = g_{\varkappa\lambda}\lambda^\mu\frac{\partial u_\varkappa}{\partial \bar{u}_\alpha}\delta_{\lambda\mu} = g_{\varkappa\lambda}\lambda^\lambda\frac{\partial u_\varkappa}{\partial \bar{u}_\alpha} = \lambda_\varkappa\frac{\partial u_\varkappa}{\partial \bar{u}_\alpha},$$

also gilt

$$\lambda_\beta = \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial u_\beta}\bar{\lambda}_\alpha, \quad \bar{\lambda}_\alpha = \frac{\partial u_\beta}{\partial \bar{u}_\alpha}\lambda_\beta \tag{12}$$

und die entsprechende Umkehrung wie oben bei den kontravarianten Komponenten.

Aus $\frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} = \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial u_\beta}\frac{\partial x_i}{\partial \bar{u}_\alpha}$ folgt, daß $\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}$ für $i = 1, 2, 3$ die kovarianten Komponenten dreier Vektoren sind, die nichts anderes als die orthogonalen Projektionen der drei Maßvektoren $\delta_{ik}$ des kartesischen Koordinatensystems im Raum auf die Tangentenebene des Punktes $P$ sind. Die Projektion z. B. von $\delta_{1i}$, also des Einheitsvektors in der Richtung der $x_1$-Achse in die Tangentenebene ist ja nach (I, 4, 15) gleich $\delta_{1i} - \delta_{1j}\nu_j\nu_i$, wo $\nu_i$ wieder der Normalenvektor des Punktes $P$ ist. Die kovarianten Komponenten dieses Vektors sind dann nach (4) wegen $\nu_i\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} = 0$

$$(\delta_{1i} - \delta_{1j}\nu_j\nu_i)\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} = \delta_{1i}\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} = \frac{\partial x_1}{\partial u_\alpha}.$$

Selbstverständlich bekommt man die $\frac{\partial x_1}{\partial u_\alpha}$ auch direkt als die mit den Einheiten $\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}$ und $\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}$ gemessenen orthogonalen Projektionen von $\delta_{1i}$ in die Richtungen (1). Man vergleiche hierzu die Fig. 9.

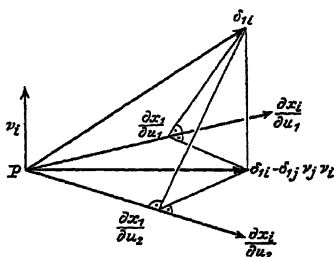



Fig. 9.

Diese drei Vektoren mit den kovarianten Komponenten $\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}$ bleiben zwar bei Parametertransformationen ungeändert, aber im allgemeinen nicht bei Bewegungen des Raumes, bei denen, wenn sie keine Parallelverschiebungen sind, die Maßvektoren $\delta_{ik}$ stets gewisse Drehungen erfahren. Die Definition kovarianter und ebenso die kontravarianter Vektorkomponenten nimmt eben überhaupt nur auf Parametertransformationen, nicht aber auf Bewegungen des Raumkoordinatensystems Rücksicht.

Die Kovarianz der $\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}$ bei festen Raumkoordinaten $x_i$ folgt übrigens auch aus einem allgemeinen Satz: *Die Ableitungen eines Skalars sind Komponenten eines kovarianten Vektors, der als Gradient des Skalars bezeichnet wird.* Dabei verstehen wir unter einem Skalar eine in einem gewissen Bereich definierte, stetige und stetig differenzierbare Funktion $\varphi$ der $u_\alpha$, die gegenüber allen zulässigen Parametertransformationen invariant ist. Für die Ableitungen von $\varphi$ gilt aber die Kettenregel

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}_\alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_\beta}\frac{\partial u_\beta}{\partial \bar{u}_\alpha}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_\beta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}_\alpha}\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial u_\beta}, \tag{13}$$

die mit dem Transformationsgesetz (12) kovarianter Vektorkomponenten übereinstimmt. Die Formeln (13) sind das kovariante Gegenstück zu den Formeln (10). Zu bemerken wäre noch, daß man statt (10) auch die entsprechenden Formeln für die Differentiale

$$d\bar{u}_\alpha = \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial u_\beta} du_\beta, \quad du_\beta = \frac{\partial u_\beta}{\partial \bar{u}_\alpha} d\bar{u}_\alpha \tag{14}$$

schreiben kann, aus denen hervorgeht, daß auch die Differentiale der unabhängigen Veränderlichen $u_\alpha$ kontravariante Vektorkomponenten sind. Sie nehmen hinsichtlich der Bezeichnungsweise eine Ausnahmestellung ein, da die Indizes nicht oben, sondern unten angeschrieben sind.[1])

Merkt man sich, daß die Differentiale $du_\alpha$ kontravariant, die Ableitungen eines Skalars kovariant sind, so kann man sich mit Hilfe der Formeln (14) und (13), die ja einfache Regeln der Differentialrechnung sind, ohne Schwierigkeit stets die allgemeinen Transformationsgesetze kontravarianter und kovarianter Vektorkomponenten (11) und (12) ins Gedächtnis zurückrufen.

Es seien nun in einem Punkt $P$ mit den Koordinaten $u_1$, $u_2$ zwei Flächenvektoren $\lambda$ und $\mu$ gegeben. Dann sind nach (2)

$$l_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}\lambda^\alpha \quad \text{bzw.} \quad m_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}\mu^\alpha,$$

---

1) Das ist der Grund, weshalb in der Literatur vielfach die unabhängigen Veränderlichen mit oberen Indizes geschrieben werden. Wollte man ganz streng sein, so müßte man die Veränderlichen etwa mit ${}_{(\alpha)}u$ und die Differentiale mit $du^\alpha$ bezeichnen.

ihre kartesischen Komponenten im $R_3$. Die Überschiebung der beiden Vektoren wird dann nach I, § 4

$$l_i m_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \lambda^\alpha \frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} \mu^\beta = \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} \lambda^\alpha \mu^\beta = g_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \mu^\beta. \tag{15}$$

Andrerseits wissen wir aber, daß die Überschiebung zweier Vektoren gleich $\lambda\mu\cos\vartheta$ ist, wo $\lambda$ und $\mu$ bzw. die Längen und $\vartheta$ den eingeschlossenen Winkel bedeuten. Nun ist aber als Sonderfall von (15)

$$(\lambda)^2 = \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta = g_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta. \tag{16}$$

Die Überschiebung zweier Vektoren eines Punktes läßt sich somit allein durch ihre kontravarianten Komponenten und die Koeffizienten der ersten Grundform ausdrücken; berücksichtigen wir (5) und (6), so erhalten wir noch weitere Formeln für die Überschiebung, für das Quadrat der Länge und somit auch für den von zwei Vektoren eingeschlossenen Winkel $\vartheta$. Wir stellen alle diese Formeln im folgenden zusammen:

Die *Überschiebung* zweier Vektoren $\lambda$ und $\mu$ eines Punktes ist

$$\lambda\mu\cos\vartheta = g_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \mu^\beta = \lambda^\alpha \mu_\alpha = \lambda_\alpha \mu^\alpha = g^{\alpha\beta} \lambda_\alpha \mu_\beta, \tag{17}$$

das *Quadrat der Länge* eines Vektors $\lambda$

$$(\lambda)^2 = g_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta = \lambda^\alpha \lambda_\alpha = g^{\alpha\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta; \tag{18}$$

der Vektor $\lambda$ ist somit ein *Einheitsvektor*, wenn

$$(\lambda)^2 = g_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta = \lambda^\alpha \lambda_\alpha = g^{\alpha\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta = 1 \tag{19}$$

ist. Für den Kosinus des von zwei Vektoren $\lambda$ und $\mu$ eines Punktes eingeschlossenen Winkels erhält man aus (17) und (18)

$$\cos\vartheta = \frac{g_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \mu^\beta}{\sqrt{g_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta}\sqrt{g_{\alpha\beta} \mu^\alpha \mu^\beta}} = \frac{\lambda^\alpha \mu_\alpha}{\sqrt{\lambda^\alpha \lambda_\alpha}\sqrt{\mu^\alpha \mu_\alpha}} = \frac{g^{\alpha\beta} \lambda_\alpha \mu_\beta}{\sqrt{g^{\alpha\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta}\sqrt{g^{\alpha\beta} \mu_\alpha \mu_\beta}}. \tag{20}$$

Sind beide Vektoren Einheitsvektoren, so stimmt (17) mit (20) überein; es ergibt sich

$$\cos\vartheta = g_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \mu^\beta = \lambda^\alpha \mu_\alpha = \lambda_\alpha \mu^\alpha = g^{\alpha\beta} \lambda_\alpha \mu_\beta. \tag{21}$$

Nach (14) sind die Differentiale $du_\alpha$ die kontravarianten Komponenten eines Vektors des Punktes $P(u_1, u_2)$ von der Länge $ds = \sqrt{g_{\alpha\beta} du_\alpha du_\beta}$. Man kann die $du_\alpha$ aber auch als *homogene Koordinaten* im Büschel der Flächentangenten des Punktes $P$ ansehen, da durch das Verhältnis $du_1 : du_2$ offenbar eine Tangente und damit eine von $P$ ausgehende *Richtung* auf der Fläche eindeutig festgelegt ist, solange nicht beide $du_\alpha = 0$ sind. Sind $du_\alpha$ und $\delta u_\alpha$ zwei von $P$ ausgehende Richtungen, so bestimmt sich der von ihnen eingeschlossene Winkel $\vartheta$ aus

$$ds\,\delta s\cos\vartheta = g_{\alpha\beta} du_\alpha \delta u_\beta, \tag{22}$$

wo $\delta s = \sqrt{g_{\alpha\beta}\delta u_\alpha \delta u_\beta}$ ist. Die beiden Richtungen stehen insbesondere aufeinander senkrecht, wenn

$$g_{\alpha\beta}\, du_\alpha\, \delta u_\beta = 0 \tag{23}$$

gilt. Ist eine der beiden Richtungen gegeben, so ist durch (23) die dazu senkrechte Richtung bis auf das Vorzeichen bestimmt, d. h. die bilineare Relation (23) gibt die *Involution* der aufeinander senkrechten Richtungen oder kurz die *Rechtwinkelinvolution* des Punktes $P$.[1]) Die sich selbst entsprechenden Richtungen (Doppelrichtungen) erhält man, wenn man in (23) $du_\alpha = \delta u_\alpha$ setzt; es folgt

$$g_{\alpha\beta}\, du_\alpha\, du_\beta = 0. \tag{24}$$

Diese Richtungen sind aber, da die erste Grundform positiv definit ist, *imaginär*, und zwar stimmen sie wegen $ds^2 = 0$ mit den isotropen Richtungen der Tangentenebene des Punktes $P$ überein (vgl. hierzu § 8 A).

Aus (22) erhält man insbesondere für den Winkel $\vartheta_1$ einer Richtung $du_\alpha$ mit der 1-Linie ($u_2 =$ konst.) durch $P$ wegen $\delta u_2 = 0$, $\delta s = \sqrt{g_{11}}\,\delta u_1$

$$\cos \vartheta_1 = \frac{g_{\alpha 1}\, du_\alpha}{ds \sqrt{g_{11}}} \tag{25}$$

und ebenso für den Winkel $\vartheta_2$ mit der 2-Linie durch $P$

$$\cos \vartheta_2 = \frac{g_{\alpha 2}\, du_\alpha}{ds \sqrt{g_{22}}} \tag{26}$$

Wir berechnen ferner das Quadrat des Flächeninhaltes $f$ eines Parallelogrammes, das von zwei Flächenvektoren ${}_{(\varkappa)}\xi$ ($\varkappa = 1, 2$) eines Punktes $P$ aufgespannt wird. Nach I, § 5 ist

$$\begin{aligned}
(f)^2 &= \varepsilon_{ikl} \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}\, {}_{(1)}\xi^\alpha \frac{\partial x_k}{\partial u_\beta}\, {}_{(2)}\xi^\beta\, \varepsilon_{hjl} \frac{\partial x_h}{\partial u_\gamma}\, {}_{(1)}\xi^\gamma \frac{\partial x_j}{\partial u_\delta}\, {}_{(2)}\xi^\delta \\
&= (\delta_{ih}\delta_{kj} - \delta_{ij}\delta_{kh}) \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial u_\beta} \frac{\partial x_h}{\partial u_\gamma} \frac{\partial x_j}{\partial u_\delta}\, {}_{(1)}\xi^\alpha\, {}_{(2)}\xi^\beta\, {}_{(1)}\xi^\gamma\, {}_{(2)}\xi^\delta \\
&= \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial u_\gamma} \frac{\partial x_k}{\partial u_\beta} \frac{\partial x_k}{\partial u_\delta} - \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial u_\delta} \frac{\partial x_k}{\partial u_\beta} \frac{\partial x_k}{\partial u_\gamma}\right) {}_{(1)}\xi^\alpha\, {}_{(2)}\xi^\beta\, {}_{(1)}\xi^\gamma\, {}_{(2)}\xi^\delta \\
&= (g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma})\, {}_{(1)}\xi^\alpha\, {}_{(2)}\xi^\beta\, {}_{(1)}\xi^\gamma\, {}_{(2)}\xi^\delta \\
&= \begin{vmatrix} {}_{(1)}\xi^\alpha\, {}_{(1)}\xi_\alpha & {}_{(1)}\xi^\alpha\, {}_{(2)}\xi_\alpha \\ {}_{(2)}\xi^\beta\, {}_{(1)}\xi_\beta & {}_{(2)}\xi^\beta\, {}_{(2)}\xi_\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}_{(1)}\xi^1 & {}_{(1)}\xi^2 \\ {}_{(2)}\xi^1 & {}_{(2)}\xi^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} {}_{(1)}\xi_1 & {}_{(1)}\xi_2 \\ {}_{(2)}\xi_1 & {}_{(2)}\xi_2 \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

1) Jede bilineare Gleichung $a_{\alpha\beta}\, du_\alpha\, \delta u_\beta = 0$ bestimmt eine *projektive Verwandtschaft* der Richtungen in $P$. Sind die Richtungen $du_\alpha$ und $\delta u_\alpha$ vertauschbar, so ist die Bilinearform symmetrisch ($a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$) und die projektive Verwandtschaft wird als Involution bezeichnet.

also

$$(27) \qquad f = \sqrt{\begin{vmatrix} {}_{(1)}\xi^1 & {}_{(1)}\xi^2 \\ {}_{(2)}\xi^1 & {}_{(2)}\xi^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} {}_{(1)}\xi_1 & {}_{(1)}\xi_2 \\ {}_{(2)}\xi_1 & {}_{(2)}\xi_2 \end{vmatrix}}.$$

Sind ${}_{(1)}\xi$ und ${}_{(2)}\xi$ die Längen der beiden Vektoren und $\vartheta$ der von ihnen eingeschlossene Winkel, so ist auch

$$(28) \qquad f = {}_{(1)}\xi\, {}_{(2)}\xi \sin \vartheta,$$

so daß das Vorzeichen von $f$ jedenfalls mit dem von $\vartheta$ übereinstimmt. Der Ausdruck (27) läßt sich noch weiter umformen. Es ist nämlich

$$(29) \quad \begin{vmatrix} {}_{(1)}\xi_1 & {}_{(1)}\xi_2 \\ {}_{(2)}\xi_1 & {}_{(2)}\xi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{\alpha 1}\, {}_{(1)}\xi^\alpha & g_{\alpha 2}\, {}_{(1)}\xi^\alpha \\ g_{\beta 1}\, {}_{(2)}\xi^\beta & g_{\beta 2}\, {}_{(2)}\xi^\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} {}_{(1)}\xi^1 & {}_{(1)}\xi^2 \\ {}_{(2)}\xi^1 & {}_{(2)}\xi^2 \end{vmatrix} = g \begin{vmatrix} {}_{(1)}\xi^1 & {}_{(1)}\xi^2 \\ {}_{(2)}\xi^1 & {}_{(2)}\xi^2 \end{vmatrix}$$

und somit

$$(30) \qquad f = \sqrt{g} \begin{vmatrix} {}_{(1)}\xi^1 & {}_{(1)}\xi^2 \\ {}_{(2)}\xi^1 & {}_{(2)}\xi^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} {}_{(1)}\xi_1 & {}_{(1)}\xi_2 \\ {}_{(2)}\xi_1 & {}_{(2)}\xi_2 \end{vmatrix}$$

und

$$(31) \qquad \sin\vartheta = \frac{\sqrt{g}}{{}_{(1)}\xi\, {}_{(2)}\xi} \begin{vmatrix} {}_{(1)}\xi^1 & {}_{(1)}\xi^2 \\ {}_{(2)}\xi^1 & {}_{(2)}\xi^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{{}_{(1)}\xi\, {}_{(2)}\xi \sqrt{g}} \begin{vmatrix} {}_{(1)}\xi_1 & {}_{(1)}\xi_2 \\ {}_{(2)}\xi_1 & {}_{(2)}\xi_2 \end{vmatrix}.$$

Das Vorzeichen von $\sin\vartheta$ und damit das von $\vartheta$ hängt also einerseits vom Vorzeichen von $\sqrt{g}$, d. h. von der Orientierung der Fläche, und andrerseits von der Reihenfolge der beiden Vektoren ${}_{(1)}\xi^\alpha$ und ${}_{(2)}\xi^\alpha$ ab. In der Regel nimmt man $\sqrt{g} > 0$; dann ist nach (2, 24) das Dreibein $\frac{\partial x_i}{\partial u_1}, \frac{\partial x_i}{\partial u_2}, \nu_i$ rechtsorientiert und der Winkel $\vartheta$ ist positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem das Dreibein $\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}\, {}_{(1)}\xi^\alpha, \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}\, {}_{(2)}\xi^\alpha, \nu_i$ rechts- oder linksorientiert ist.

Je zwei von einem Punkt $P(u_1, u_2)$ ausgehende Vektoren ${}_{(\varkappa)}\xi$ auf der Fläche, deren Richtungen nicht zusammenfallen, nennen wir ein *Zweibein* des Punktes $P$. Zu jedem Zweibein gibt es ein *adjungiertes Zweibein*, d. h. zwei Vektoren ${}_{(\varkappa)}\eta$ desselben Punktes, für die

$$(32) \qquad {}_{(\varkappa)}\xi^\alpha\, {}_{(\lambda)}\eta_\alpha = \delta_{\varkappa\lambda}$$

gilt. Da nach Voraussetzung die Determinante ${}_{(1)}\xi^1\, {}_{(2)}\xi^2 - {}_{(1)}\xi^2\, {}_{(2)}\xi^1 \neq 0$ ist, lassen sich die linearen Gleichungen (32) stets auflösen und bestimmen das adjungierte Zweibein *eindeutig*. Wegen

$$(33) \qquad {}_{(\varkappa)}\xi^\alpha\, {}_{(\lambda)}\eta_\alpha = {}_{(\varkappa)}\xi_\beta\, g^{\alpha\beta}\, {}_{(\lambda)}\eta_\alpha = {}_{(\varkappa)}\xi_\beta\, {}_{(\lambda)}\eta^\beta = {}_{(\lambda)}\eta^\alpha\, {}_{(\varkappa)}\xi_\alpha = \delta_{\varkappa\lambda} = \delta_{\lambda\varkappa}$$

ist das zu $u_1, u_2, {}_{(\varkappa)}\eta^1, {}_{(\varkappa)}\eta^2$ adjungierte Zweibein wieder das ursprüngliche Zweibein $u_1, u_2, {}_{(\varkappa)}\xi_1, {}_{(\varkappa)}\xi_2$. Bemerkt sei, daß die Formeln (32) für $\varkappa \neq \lambda$ besagen, daß ${}_{(1)}\eta_\alpha$ auf ${}_{(2)}\xi_\alpha$ und ebenso ${}_{(2)}\eta_\alpha$ auf ${}_{(1)}\xi_\alpha$ senkrecht steht.

Wir zeigen noch, daß aus (32) auch

$$ {}_{(\varkappa)}\xi^{\alpha}\,{}_{(\varkappa)}\eta_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \tag{34} $$

folgt. Setzen wir zunächst

$$ {}_{(\varkappa)}\xi^{\alpha}\,{}_{(\varkappa)}\eta_{\beta} = c^{\alpha}_{\beta}, $$

so ergibt sich daraus durch Multiplikation mit ${}_{(\lambda)}\eta_{\alpha}$ und Summation über $\alpha$ wegen (32)

$$ {}_{(\varkappa)}\xi^{\alpha}\,{}_{(\lambda)}\eta_{\alpha}\,{}_{(\varkappa)}\eta_{\beta} = \delta_{\varkappa\lambda}\,{}_{(\varkappa)}\eta_{\beta} = {}_{(\lambda)}\eta_{\beta} = c^{\alpha}_{\beta}\,{}_{(\lambda)}\eta_{\alpha}; $$

da andrerseits ${}_{(\lambda)}\eta_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}\,{}_{(\lambda)}\eta_{\alpha}$ ist, muß $(c^{\alpha}_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta})\;{}_{(\lambda)}\eta_{\alpha} = 0$ sein, woraus sich $c^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$ ergibt, w. z. b. w. Ganz analog schließt man aus dem Bestehen von (34) auf das von (32), so daß auch (34) notwendig und hinreichend für adjungierte Zweibeine ist.

Aus (34) erhält man durch Multiplikation mit $g_{\alpha\gamma}$ und Summation über $\alpha$, wenn man nachher wieder $\gamma$ durch $\alpha$ ersetzt,

$$ {}_{(\varkappa)}\xi_{\alpha}\,{}_{(\varkappa)}\eta_{\beta} = g_{\alpha\beta} \tag{35} $$

und analog durch Multiplikation mit $g^{\beta\gamma}$ und Summation über $\beta$

$$ {}_{(\varkappa)}\xi^{\alpha}\,{}_{(\varkappa)}\eta^{\beta} = g^{\alpha\beta}. \tag{36} $$

Sind ${}_{(\varkappa)}\xi$ insbesondere zwei zueinander senkrechte Einheitsvektoren eines Punktes — man spricht dann von einem *normierten Zweibein des Punktes* $P(u_1, u_2)$ —, so ist das adjungierte Zweibein durch dieselben Vektoren gegeben. An Stelle von (32) und (34) gilt dann

$$ {}_{(\varkappa)}\xi^{\alpha}\,{}_{(\lambda)}\xi_{\alpha} = \delta_{\varkappa\lambda} \tag{37} $$

(die Bedingung für Orthogonalität und Länge Eins) bzw.

$$ {}_{(\varkappa)}\xi^{\alpha}\,{}_{(\varkappa)}\xi_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}. \tag{38} $$

Aus (31) folgt

$$ \begin{vmatrix} {}_{(1)}\xi^1 & {}_{(1)}\xi^2 \\ {}_{(2)}\xi^1 & {}_{(2)}\xi^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g}} \tag{39} $$

und

$$ \begin{vmatrix} {}_{(1)}\xi_1 & {}_{(1)}\xi_2 \\ {}_{(2)}\xi_1 & {}_{(2)}\xi_2 \end{vmatrix} = \sqrt{g}. \tag{40} $$

Die Relationen (35) und (36) gehen über in

$$ {}_{(\varkappa)}\xi_{\alpha}\,{}_{(\varkappa)}\xi_{\beta} = g_{\alpha\beta} \tag{41} $$

und

$$ {}_{(\varkappa)}\xi^{\alpha}\,{}_{(\varkappa)}\xi^{\beta} = g^{\alpha\beta}. \tag{42} $$

Diese beiden Darstellungen der $g_{\alpha\beta}$ und $g^{\alpha\beta}$ durch normierte Zweibeine werden wir oft verwenden.

## § 4. Tensoren auf der Fläche.

Zur Definition des Tensorbegriffes ist erforderlich, daß eine bestimmte Mannigfaltigkeit (Raum) und in dieser eine Transformationsgruppe vorgegeben ist. Für den Fall des euklidischen Raumes, d. h. einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit und der Bewegungsgruppe haben wir in I, § 4 den Begriff des Tensors durch das Koeffizientensystem einer invarianten Multilinearform willkürlicher Vektoren definiert. Wir wollen jetzt diesen Begriff auf den Fall einer Fläche, d. h. einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit und der Gruppe der zulässigen Parametertransformationen übertragen. Die dabei notwendigen Entwicklungen laufen parallel zu dem a. a. O. Gesagten, so daß wir uns auf einige ergänzende Bemerkungen beschränken können. Im übrigen Verweisen wir gleich hier auf die allgemeine Darstellung im zweiten Band. vor allem ist zweierlei zu bemerken:

I. An Stelle der $x_i$ treten die $u_\alpha$ (über die Bedeutung der Indizes vgl. die Anm. 1 auf S. 79), an Stelle der orthogonalen Transformationen $x_i = a_{ik}\bar{x}_k + b_i$ die zulässigen Transformationen $u_\alpha = u_\alpha(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$.

II. An Stelle der beliebigen Vektoren des Raumes treten jetzt die Flächenvektoren eines Punktes $P(u_1, u_2)$, die sowohl durch kovariante, wie durch kontravariante Komponenten gegeben sein können.

Somit hat die allgemeine Definition des Tensors jetzt folgendermaßen zu lauten:

*Die $2^m$ Koeffizienten einer in den kontravarianten Komponenten ${}_{(1)}\lambda^\alpha, \ldots, {}_{(p)}\lambda^\alpha$ von $p$ willkürlichen Vektoren und in den kovarianten Komponenten ${}_{(1)}\mu_\alpha, \ldots, {}_{(q)}\mu_\alpha$ von $q$ weiteren willkürlichen Vektoren $(p + q = m)$ eines Punktes $P$ linearen Form*

$$(1)\qquad f = A_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}^{\cdots\cdots\ \beta_1 \ldots \beta_q}\, {}_{(1)}\lambda^{\alpha_1} \ldots {}_{(p)}\lambda^{\alpha_p}\, {}_{(1)}\mu_{\beta_1} \cdots {}_{(q)}\mu_{\beta_q}$$

*sind ein Tensor m ter Stufe, genauer ein p fach kovarianter, q fach kontravarianter Tensor des Punktes P, wenn die Form f gegenüber allen zulässigen Transformationen der $u_\alpha$ invariant ist.* Aus dieser Definition folgt wegen (3, 11) und (3, 12) sofort das Transformationsgesetz des Tensors (1)

$$(2)\qquad \bar{A}_{\gamma_1 \ldots \gamma_p}^{\cdots\cdots\ \delta_1 \ldots \delta_q} = A_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}^{\cdots\cdots\ \beta_1 \ldots \beta_q} \frac{\partial u_{\alpha_1}}{\partial \bar{u}_{\gamma_1}} \cdots \frac{\partial u_{\alpha_p}}{\partial \bar{u}_{\gamma_p}} \frac{\partial \bar{u}_{\delta_1}}{\partial u_{\beta_1}} \cdots \frac{\partial \bar{u}_{\delta_q}}{\partial u_{\beta_q}}.$$

Man beachte die Stellung der Indizes in (1); von je zwei gleichen steht einer oben und einer unten!

Die kontravarianten (kovarianten) Komponenten eines Vektors sind ein kontravarianter (kovarianter) Tensor erster Stufe. Man spricht deshalb auch kurz von kontravarianten (kovarianten) Vektoren.

Ist $p = 0$ $(q = 0)$, so heißt der Tensor (1) *rein kontravariant* (*rein kovariant*).

Zwei Tensoren heißen *gleichartig*, wenn sie gleichviele kontravariante und gleichviele kovariante Indizes tragen.

Die *Summe* gleichartiger und das *Produkt* beliebiger Tensoren eines Punktes $P$ sind wie a. a. O. definiert und liefern auch hier stets wieder Tensoren.

*Verjüngen* und *überschieben* kann man nur dann, wenn von den beiden Indizes einer kontravariant, der andere kovariant ist, niemals z. B. nach zwei kovarianten Indizes. Die beiden Prozesse liefern, auf Tensoren angewendet[1]), immer wieder Tensoren (Skalare sind Tensoren nullter Stufe!). Statt Überschiebung sagt man auch bei Tensoren vielfach *inneres Produkt*.

Dagegen beziehen sich die Eigenschaften der *Symmetrie* und *schiefen Symmetrie* stets nur auf gleichartige Indizes. Die Relation $A_{\beta}^{\cdot\,\alpha} = A_{\alpha}^{\cdot\,\beta}$ z. B. ist nicht sinnvoll, d. h. an bestimmte Parameter gebunden, was sich der Leser selbst des näheren überlegen möge.

Wir haben bisher stets nur von Vektoren und Tensoren eines Punktes gesprochen. Es kann natürlich ein Tensor auch in mehreren Punkten gegeben sein, z. B. in allen Punkten einer Flächenkurve (wie der Tangentenvektor einer solchen) oder in allen Punkten der Fläche (*Tensorfeld*). Die Komponenten des Tensors sind dann Funktionen des Kurvenparameters oder der $u_\alpha$.

Ein besonders wichtiger symmetrischer kovarianter Tensor zweiter Stufe, der in allen Punkten der Fläche definiert ist, besteht im System der Koeffizienten $g_{\alpha\beta}$ der ersten Grundform; er heißt der *kovariante Maßtensor* der Fläche. Die durch (3, 6) oder (3, 8) definierten $g^{\alpha\beta}$ sind ein symmetrischer kontravarianter Tensor zweiter Stufe, den man den *kontravarianten Maßtensor* der Fläche nennt. Zum Beweis überschieben wir (3, 6) beiderseits mit einem willkürlichen kovarianten Vektor $\mu_\alpha$ und erhalten

$$\lambda^\alpha \mu_\alpha = g^{\alpha\beta} \mu_\alpha \lambda_\beta ;$$

aus der Invarianz der linken Seite folgt die der rechten und somit der Tensorcharakter der $g^{\alpha\beta}$.

Die Formeln (3, 5) und (3, 6) zeigen, daß man durch Überschiebung mit dem Maßtensor kontravariante Vektorkomponenten in kovariante verwandeln kann und umgekehrt. Man spricht von einem „*Herunterziehen*“ und

---

1) Der Bequemlichkeit halber nennen wir jede Multiplikation und darauffolgende Summation eine Überschiebung, auch wenn es sich nicht um kovariante oder kontravariante Indizes handelt. Beispiele von Überschiebungen sind (1) und (2); die $\frac{\partial u_\alpha}{\partial \bar{u}_\beta}$ sind aber kein Tensor!

*„Heraufziehen“* der Indizes. Derselbe Prozeß ist auch bei Tensoren durchführbar, z. B.

$$A_{\alpha\cdot\delta}^{\cdot\beta} = g_{\gamma\delta} A_{\alpha}^{\cdot\beta\gamma}, \quad B_{\alpha}^{\cdot\beta\delta} = g^{\gamma\delta} B_{\alpha\cdot\gamma}^{\cdot\beta}.$$

Tensoren, die sich nur durch verschiedene Stellung der Indizes unterscheiden, nennt man *assoziiert*. Wie bei den Vektoren kann man von einem Tensor schlechthin sprechen, dessen Komponenten kontravariant, kovariant oder irgendwie gemischt sein können. Hierin liegt auch der Grund, weshalb wir niemals zwei Indizes eines Tensors untereinander schreiben; abgesehen davon ist die Anordnung der kontravarianten und kovarianten Indizes durchaus willkürlich, nur muß an einer einmal getroffenen Anordnung dann auch festgehalten werden. Man kann z. B. das Produkt zweier Tensoren $A_{\alpha}^{\cdot\beta}$ und $B_{\gamma\delta}^{\cdot\cdot\varepsilon}$ mit $C_{\alpha\cdot\gamma\delta}^{\cdot\beta\cdot\cdot\varepsilon}$, $C_{\alpha\gamma\delta}^{\cdot\cdot\cdot\beta\varepsilon}$ oder $C^{\beta\varepsilon}{}_{\cdot\cdot\alpha\gamma\delta}$ usw. bezeichnen.

Der in (3, 8) durch Überschiebung des kontravarianten und kovarianten Maßtensors gewonnene Tensor $\delta_{\alpha}^{\beta}$ wird als *gemischter Maßtensor* bezeichnet. Wegen der Symmetrie der $g_{\alpha\beta}$ und $g^{\alpha\beta}$ ist hier die Anordnung der Indizes gleichgültig.

Aus der Homogenität des Transformationsgesetzes (2) folgt, daß der Begriff des *Nulltensors* sinnvoll ist, d. h.: *Verschwinden in einem Koordinatensystem alle Komponenten eines Tensors, so gilt dasselbe auch in jedem anderen (zulässigen) Koordinatensystem.* Dasselbe gilt als Sonderfall vom *Nullvektor*.

Wir haben bisher nur von Tensoren eines Punktes gesprochen. Selbstverständlich kann ein Tensor auch in allen Punkten einer Kurve oder in allen Punkten der Fläche definiert sein; seine Komponenten setzen wir dann als stetige Funktionen des Kurvenparameters bzw. der Koordinaten $u_{\alpha}$ auf der Fläche voraus. Beispiele sind der Tangentenvektor $\frac{du_{\alpha}}{dt}$ einer mindestens einmal stetig differenzierbaren Flächenkurve $u_{\alpha} = u_{\alpha}(t)$ oder der Maßtensor, dessen Komponenten nach (2, 6) $\varrho - 1$ mal stetig differenzierbare Funktionen der $u_{\alpha}$ sind.

Wir betrachten in einem Punkt $P(u_1, u_2)$ unserer Fläche ein Paar adjungierter Zweibeine ${}_{(\varkappa)}\xi$ und ${}_{(\varkappa)}\eta$. Zwischen den Komponenten bestehen dann die Relationen (3, 32) und (3, 34). *Mit Hilfe eines solchen Paares adjungierter Zweibeine läßt sich dann jeder Tensor m ter Stufe durch $2^m$ Invarianten eindeutig darstellen.* Nehmen wir als Beispiel etwa einen gemischten Tensor zweiter Stufe $t^{\alpha}_{\cdot\beta}$ des Punktes $P$. Wir bilden die vier ($m = 2$) Invarianten

$$(3) \qquad {}_{(\varkappa\lambda)}t = t^{\gamma}_{\cdot\delta}\, {}_{(\varkappa)}\eta_{\gamma}\, {}_{(\lambda)}\xi^{\delta}.$$

Überschieben wir diese Gleichungen mit ${}_{(\varkappa)}\xi^{\alpha}\, {}_{(\lambda)}\eta_{\beta}$, so folgt nach (3, 32) die gesuchte *Beindarstellung* des Tensors

$$(4) \qquad t^{\alpha}_{\cdot\beta} = {}_{(\varkappa\lambda)}t\, {}_{(\varkappa)}\xi^{\alpha}\, {}_{(\lambda)}\eta_{\beta}.$$

Für Tensoren höherer Stufe ist der Nachweis ganz analog; wir wollen nur noch den im folgenden besonders wichtigen Fall eines rein kovarianten Tensors zweiter Stufe $t_{\alpha\beta}$ des Punktes $P$ näher betrachten. Wir setzen

(5) $$_{(\varkappa\lambda)}t^* = t_{\gamma\delta\,(\varkappa)}\xi^\gamma{}_{(\lambda)}\xi^\delta$$

und erhalten

(6) $$t_{\alpha\beta} = {}_{(\varkappa\lambda)}t^*{}_{(\varkappa)}\eta_{\alpha\,(\lambda)}\eta_\beta .$$

Ist der Tensor $t_{\alpha\beta}$ symmetrisch, also $t_{\alpha\beta} = t_{\beta\alpha}$, so ist auch $_{(\varkappa\lambda)}t^* = {}_{(\lambda\varkappa)}t^*$ und umgekehrt. Analog ist $_{(\varkappa\lambda)}t^* = -{}_{(\lambda\varkappa)}t^*$ notwendig und hinreichend für schiefe Symmetrie des Tensors $t_{\alpha\beta}$. Für *Nulltensoren*, und nur für solche, verschwinden sämtliche Invarianten.

Ist

(7) $$t_{\gamma\beta} = g_{\alpha\gamma}t^\alpha_{\cdot\beta},$$

so ergibt sich aus (4) eine zweite Darstellung für $t_{\alpha\beta}$, wenn wir den Index $\alpha$ herunterziehen:

(8) $$t_{\alpha\beta} = {}_{(\varkappa\lambda)}t\,{}_{(\varkappa)}\xi_{\alpha\,(\lambda)}\eta_\beta .$$

Man erkennt, daß im allgemeinen $_{(\varkappa\lambda)}t^* \neq {}_{(\varkappa\lambda)}t$ ist, wenn $t_{\alpha\beta}$ kein Nulltensor ist. Ziehen wir in (4) den Index $\beta$ hinauf, so erhalten wir die Beindarstellung

(9) $$t^{\alpha\beta} = {}_{(\varkappa\lambda)}t\,{}_{(\varkappa)}\xi^\alpha{}_{(\lambda)}\eta^\beta$$

des rein kontravarianten Tensors $t^{\alpha\beta} = g^{\beta\gamma}t^\alpha_{\cdot\gamma}$.

Für den gemischten Maßtensor $g^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta$ erhalten wir nach (3)

(10) $$_{(\varkappa\lambda)}g = \delta^\gamma_{\delta\,(\varkappa)}\eta_{\gamma\,(\lambda)}\xi^\delta = \delta_{\varkappa\lambda},$$

während (4) mit (3, 34) identisch wird. Die Darstellungen (8) und (9) gehen über in die Formeln (3, 35) und (3, 36). Alle diese Formeln gelten identisch in den $u_\alpha$, wenn die Komponenten der Vektoren der beiden adjungierten Zweibeine in allen Punkten der Fläche definierte Funktionen der $u_\alpha$ sind.

Ist das eine Zweibein normiert, so fällt es mit dem adjungierten zusammen. An Stelle von (3) und (4) erhält man dann beispielsweise

(11) $$_{(\varkappa\lambda)}t = t^\gamma_{\cdot\delta\,(\varkappa)}\xi_{\gamma\,(\lambda)}\xi^\delta$$

und

(12) $$t^\alpha_{\cdot\beta} = {}_{(\varkappa\lambda)}t\,{}_{(\varkappa)}\xi^\alpha{}_{(\lambda)}\xi_\beta .$$

Es sei nun in allen Punkten der Fläche ein normiertes rechtsorientiertes[1]) Zweibein definiert; die Komponenten seien $\varrho - 1$ mal stetig differenzierbare

1) Damit ist hier und im folgenden gemeint, daß die drei Vektoren $_{(1)}\xi^\alpha \dfrac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}$, $_{(2)}\xi^\alpha \dfrac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}$ und $\nu_i$ ein rechtsorientiertes Dreibein des $R_3$ bilden.

Funktionen der $u_\alpha$. Wir definieren ähnlich wie in I, § 5 einen schiefsymmetrischen Tensor zweiter Stufe, den *kovarianten ε-Tensor*, durch die Beindarstellung

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = {}_{(1)}\xi_\alpha\,{}_{(2)}\xi_\beta - {}_{(2)}\xi_\alpha\,{}_{(1)}\xi_\beta\,. \tag{13}$$

Die zugehörigen Invarianten ${}_{(\alpha\beta)}\varepsilon$ sind also der Reihe nach $0, +1, -1, 0$. Wegen (3, 40) ist somit im einzelnen $(\sqrt{g} > 0)$

$$\varepsilon_{11} = 0\,, \quad \varepsilon_{12} = \sqrt{g}\,, \quad \varepsilon_{21} = -\sqrt{g}\,, \quad \varepsilon_{22} = 0\,. \tag{14}$$

Sind $\lambda^\alpha$ und $\mu^\alpha$ die kontravarianten Komponenten zweier Vektoren eines Punktes $P(u_1, u_2)$, so wird

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\mu^\beta = {}_{(1)}\xi_\alpha\lambda^\alpha\,{}_{(2)}\xi_\beta\mu^\beta - {}_{(2)}\xi_\alpha\lambda^\alpha\,{}_{(1)}\xi_\beta\mu^\beta = \begin{vmatrix} {}_{(1)}\xi_1 & {}_{(1)}\xi_2 \\ {}_{(2)}\xi_1 & {}_{(2)}\xi_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda^1 & \lambda^2 \\ \mu^1 & \mu^2 \end{vmatrix} = \sqrt{g} \begin{vmatrix} \lambda^1 & \lambda^2 \\ \mu^1 & \mu^2 \end{vmatrix} = f, \tag{15}$$

wo $f$ der Flächeninhalt des von den Vektoren $\lambda^\alpha$, $\mu^\alpha$ aufgespannten Parallelogrammes ist, in dessen Invarianz wir eine neuerliche Bestätigung des Tensorcharakters der $\varepsilon_{\alpha\beta}$ sehen. Die Überschiebung von $\varepsilon_{\alpha\beta}$ mit einem kontravarianten Vektor $u_1, u_2, \lambda^1, \lambda^2$ liefert einen kovarianten Vektor

$$\mu_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\lambda^\beta \tag{16}$$

des Punktes $u_1, u_2$, der wegen

$$\lambda^\alpha\mu_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta = 0 \tag{17}$$

*auf $\lambda^\alpha$ senkrecht steht*, worin eine gewisse Analogie mit dem äußeren Produkt zweier Vektoren des euklidischen $R_3$ liegt. Als äußeres Produkt zweier Vektoren auf der Fläche hat man die Bilinearform (15) anzusehen, die aber hier keinen Vektor, sondern eine Invariante liefert, die dem Betrag nach mit der Länge des äußeren Produktes der beiden Vektoren übereinstimmt, wenn man diese als Vektoren des euklidischen $R_3$, des Einbettungsraumes der Fläche ansieht[1]), während das Vorzeichen von der Orientierung abhängt.

Die zweimalige Überschiebung von $\varepsilon_{\alpha\beta}$ mit dem Maßtensor liefert den *kontravarianten ε-Tensor*

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}\varepsilon_{\gamma\delta} = g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}\left({}_{(1)}\xi_\gamma\,{}_{(2)}\xi_\delta - {}_{(2)}\xi_\gamma\,{}_{(1)}\xi_\delta\right) = {}_{(1)}\xi^\alpha\,{}_{(2)}\xi^\beta - {}_{(2)}\xi^\alpha\,{}_{(1)}\xi^\beta. \tag{18}$$

Die Überschiebung von $\varepsilon^{\alpha\beta}$ mit einem kovarianten Vektor gibt einen zu diesem senkrechten kontravarianten Vektor und die Überschiebung mit zwei kovarianten Vektoren den Inhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelogrammes. Im einzelnen ist wegen (3, 39)

$$\varepsilon^{11} = 0\,, \quad \varepsilon^{12} = \frac{1}{\sqrt{g}}, \quad \varepsilon^{21} = -\frac{1}{\sqrt{g}}, \quad \varepsilon^{22} = 0\,. \tag{19}$$

---

1) Im $n$ dimensionalen Raum ist das äußere Produkt zweier Vektoren ein Tensor $n-2$ter Stufe, das äußere Produkt von $n-1$ Vektoren ein Vektor und das äußere Produkt von $n$ Vektoren eine Invariante.

Mittels der Beindarstellungen (13) und (18) der $\varepsilon$-Tensoren durch die Vektoren eines normierten Zweibeins bestätigt man leicht die Relationen

(20) $$\varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\beta},$$

(21) $$\varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon^{\beta\delta}g_{\gamma\delta} = g^{\alpha\beta},$$

(22) $$\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}g^{\gamma\delta} = g_{\alpha\beta},$$

(23) $$\varepsilon^{\alpha\varrho}\varepsilon^{\beta\sigma} = g^{\alpha\beta}g^{\varrho\sigma} - g^{\alpha\sigma}g^{\beta\varrho}$$

und

(24) $$\varepsilon_{\alpha\varrho}\varepsilon_{\beta\sigma} = g_{\alpha\beta}g_{\varrho\sigma} - g_{\alpha\sigma}g_{\beta\varrho}.$$

Für den Normalenvektor (2, 24) erhält man die symmetrische Darstellung

(25) $$\nu_l = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\alpha\beta}\,\varepsilon_{ikl}\,\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}\,\frac{\partial x_k}{\partial u_\beta}.$$

Sind $\xi^\alpha$ und $\eta^\alpha$ zwei beliebige kontravariante Vektoren eines Punktes, so ist

(26) $$\varepsilon_{ikl}\,\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}\,\frac{\partial x_k}{\partial u_\beta}\,\xi^\alpha\eta^\beta = \sqrt{g}\,\nu_l\,(\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1) = \nu_l\,\varepsilon_{\alpha\beta}\xi^\alpha\eta^\beta$$

und somit gilt auch

(27) $$\varepsilon_{ikl}\,\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}\,\frac{\partial x_k}{\partial u_\beta} = \nu_l\,\varepsilon_{\alpha\beta};$$

durch Überschiebung mit $\nu_l$ folgt wegen $\nu_l\nu_l = 1$

(28) $$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{ikl}\,\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}\,\frac{\partial x_k}{\partial u_\beta}\,\nu_l.$$

## § 5. Paare quadratischer Formen.

Es sei in einem Punkt $P(u_1, u_2)$ ein kovarianter Tensor zweiter Stufe $a_{\alpha\beta}$ gegeben. Die Diskriminante

(1) $$a = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

der invarianten Bilinearform

(2) $$\varphi = a_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\mu^\beta,$$

wo $\lambda^\alpha$ und $\mu^\beta$ zwei willkürliche kontravariante Vektoren des Punktes $P$ sind, ist eine relative Invariante; man erhält bei einer zulässigen Transformation

$$u_\alpha = u_\alpha(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$$

der Parameter nach (4, 2)

(3) $$\bar{a} = \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} - \bar{a}_{12}\bar{a}_{21} = a\left[\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(\bar{u}_1, \bar{u}_2)}\right]^2,$$

d. h. dasselbe Transformationsgesetz (2, 19) wie für die Diskriminante $g$ der ersten Grundform. Somit ist $\frac{a}{g}$ eine *absolute Invariante* (Simultaninvariante

der beiden Formen). Man erhält diese Invariante durch zweimalige Überschiebung des Produktes $a_{\alpha\beta}a_{\gamma\delta}$ mit dem kontravarianten $\varepsilon$-Tensor in der Form

(4) $$\frac{a}{g} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon^{\beta\delta}a_{\alpha\beta}a_{\gamma\delta}.$$

Es sei nun der Tensor $a_{\alpha\beta}$ insbesondere symmetrisch, also $a_{12} = a_{21}$. Wir betrachten die beiden quadratischen Formen

(5) $$f = g_{\alpha\beta}du_\alpha du_\beta = ds^2$$

und

(6) $$\varphi = a_{\alpha\beta}du_\alpha du_\beta.$$

Von $\varphi$ setzen wir nur voraus, daß im Punkt $P(u_1, u_2)$ die Diskriminante $a \neq 0$ sei.[1]) Wir bilden den Quotienten

(7) $$\lambda = \frac{\varphi}{f} = \frac{a_{\alpha\beta}du_\alpha du_\beta}{g_{\alpha\beta}du_\alpha du_\beta},$$

dessen Wert im Punkt $P$ noch von den Richtungen $du_1 : du_2$ abhängt. Wir suchen eventuelle Extremwerte dieses Quotienten $\lambda$. Um das unbequeme Differenzieren in homogenen Veränderlichen zu vermeiden, legen wir den $du_\alpha$ die Bedingung auf, daß $f = ds^2$ einen gegebenen konstanten (d. h. von den $du_\alpha$ unabhängigen) positiven Wert habe; dann handelt es sich um die Bestimmung der Extrema von $\varphi$ unter der Nebenbedingung $f =$ konst. In der Differentialrechnung wird gezeigt, daß man derartige Extremumsaufgaben mit Nebenbedingungen nach Lagrange folgendermaßen löst: Man bildet die Funktion

(8) $$F = \varphi - \lambda f$$

mit einem willkürlichen Multiplikator $\lambda$ und bestimmt die Extrema der Funktion $F$ der unabhängigen Veränderlichen $du_1$ und $du_2$; die sich daraus ergebenden Werte der $du_\alpha$ geben dann auch die Lösung des ursprünglichen Problems. Man hat also die beiden Gleichungen

(9) $$\frac{\partial F}{\partial du_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial du_2} = 0$$

1) Ist $a > 0$, so ist $\varphi$ *positiv* oder *negativ definit* (d. h. $\varphi$ nimmt nur positive, bzw. nur negative Werte an, solange nicht beide $du_\alpha = 0$ sind), je nachdem $a_{11} > 0$ oder $a_{11} < 0$ ist; ist $a < 0$, so ist $\varphi$ *indefinit* (d. h. $\varphi$ nimmt Werte beiderlei Vorzeichens an). In dem von uns ausgeschlossenen Fall $a = 0$ heißt $\varphi$ *halbdefinit* (d. h. $\varphi$ wird an einer Stelle Null, ohne daß beide $du_\alpha = 0$ sind, nimmt aber sonst nur Werte eines Vorzeichens an) und ist das positiv oder negativ genommene Quadrat einer Linearform. Typische Beispiele (Normalformen) sind

$$\varphi = du_1^2 + du_2^2,\ \varphi = -du_1^2 - du_2^2;$$
$$\varphi = du_1^2 - du_2^2,\ \varphi = -du_1^2 + du_2^2;\ \varphi = du_1^2,\ \varphi = -du_1^2.$$

zu lösen; die Nebenbedingung können wir nachträglich wieder weglassen, da es uns auf den Wert von $ds^2$ nicht ankommt. Die Gleichungen (9) können wir wegen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial du_\gamma} = a_{\alpha\beta} du_\alpha \delta_{\beta\gamma} + a_{\alpha\beta} du_\beta \delta_{\alpha\gamma} = a_{\alpha\gamma} du_\alpha + a_{\beta\gamma} du_\beta = 2a_{\alpha\gamma} du_\alpha$$

in der Form

$$(a_{\alpha\gamma} - \lambda g_{\alpha\gamma}) du_\alpha = 0 \tag{10}$$

schreiben. (10) sind zwei lineare homogene Gleichungen für die gesuchte Richtung $du_1 : du_2$ (es handelt sich ja, nachdem wir die Nebenbedingung wieder weggelassen haben, nur um die Bestimmung dieses Verhältnisses); die Bedingung für die Lösbarkeit besteht im Verschwinden der Gleichungsdeterminante, die wir ähnlich wie (4) gleich in der invarianten Form

$$\varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\gamma\sigma} (a_{\alpha\gamma} - \lambda g_{\alpha\gamma})(a_{\beta\sigma} - \lambda g_{\beta\sigma}) = 0 \tag{11}$$

schreiben. Wir bemerken, daß für alle Lösungen $du_\alpha$, $\lambda$ der Gleichungen (10) und (11) die Form $F$ verschwindet, woraus wegen (7) folgt, daß die Lösungen von (11) mit den gesuchten Extremwerten übereinstimmen. Die quadratische Gleichung (11) heißt *charakteristische Gleichung* des Formenpaares $f$, $\varphi$. Sie hat stets *reelle Wurzeln*, wenn die Form $f$ positiv definit ist, was in unserem Fall jedenfalls zutrifft.[1])

Führen wir die Multiplikation in (11) aus, so folgt

$$\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\gamma\delta} g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} \lambda^2 - \varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\gamma\delta}(a_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} + a_{\beta\delta} g_{\alpha\gamma})\lambda + \varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\gamma\delta} a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} = 0. \tag{12}$$

Wegen (4),

$$\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\gamma\delta}(a_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} + a_{\beta\delta} g_{\alpha\gamma}) = a_{\alpha\gamma} g^{\alpha\gamma} + a_{\beta\delta} g^{\beta\delta} = 2a_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} \tag{13}$$

und

$$\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\gamma\delta} g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} = g_{\alpha\gamma} g^{\alpha\gamma} = \delta^\alpha_\alpha = 2 \tag{14}$$

---

1) Sei $\eta + i\zeta$ $(i^2 = -1)$ eine komplexe Wurzel von (11). Die quadratische Form

$$(a_{\alpha\beta} - \eta g_{\alpha\beta} - i\zeta g_{\alpha\beta}) du_\alpha du_\beta$$

ist dann, wenn sie nicht identisch verschwindet, das Quadrat einer Linearform und es gilt daher

$$(a_{\alpha\beta} - \eta g_{\alpha\beta} - i\zeta g_{\alpha\beta}) du_\alpha du_\beta = (\varphi_\alpha du_\alpha)^2. \tag{I}$$

Setzen wir die Imaginärteile von (I) einander gleich, wobei $\varphi_\alpha = \psi_\alpha + i\chi_\alpha$ sei, so wird

$$-\zeta g_{\alpha\beta} du_\alpha du_\beta = 2\psi_\alpha du_\alpha \chi_\beta du_\beta. \tag{II}$$

Nun lassen sich aber sicher zwei Werte $du_\alpha$ finden, die nicht beide Null sind, für die aber $\psi_\alpha du_\alpha$ (oder $\chi_\beta du_\beta$) $= 0$ wird. Da aber $g_{\alpha\beta} du_\alpha du_\beta$ definit ist, also nur verschwindet, wenn beide $du_\alpha = 0$ sind, muß nach (II) jedenfalls $\zeta = 0$ gelten, w. z. b. w.

erhalten wir nach Unterdrückung des Faktors 2

$$\lambda^2 - a_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} \lambda + \frac{a}{g} = 0. \tag{15}$$

Bezeichnen wir die Wurzeln mit ${}_{(1)}\lambda$ und ${}_{(2)}\lambda$, so ist also

$${}_{(1)}\lambda \, {}_{(2)}\lambda = \frac{a}{g} \tag{16}$$

und

$${}_{(1)}\lambda + {}_{(2)}\lambda = g^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}. \tag{17}$$

Auch der zweite Ausdruck ist eine wichtige absolute Simultaninvariante der beiden Formen $f$ und $\varphi$. Zu jeder Wurzel ${}_{(\alpha)}\lambda$ erhält man aus (10) eine zugehörige Richtung $du_1 : du_2$, die man auch direkt aus einer quadratischen Gleichung berechnen kann, die sich durch Elimination von $\lambda$ aus (10) ergibt. Diese quadratische Gleichung kann man

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha 1}\, du_\alpha & g_{\beta 1}\, du_\beta \\ a_{\alpha 2}\, du_\alpha & g_{\beta 2}\, du_\beta \end{vmatrix} = 0 \tag{18}$$

oder besonders übersichtlich

$$\begin{vmatrix} a_{11} & g_{11} & du_2^2 \\ a_{12} & g_{12} & -du_1\, du_2 \\ a_{22} & g_{22} & du_1^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{19}$$

oder schließlich in invarianter Form

$$\psi = \varepsilon^{\gamma\delta} a_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} du_\alpha du_\beta = 0 \tag{20}$$

schreiben. Die quadratische Form $\psi$ ist eine irrationale[1]) Simultaninvariante der beiden Formen $f$ und $\varphi$. Die Gleichungen (18) bis (20) haben ebenfalls stets reelle Lösungen. Das folgt daraus, daß diese Lösungen mit denen von (10) übereinstimmen, wo für $\lambda$ die reellen Wurzeln von (11) einzusetzen sind.

Zu der Gleichung (20) gelangt man auch auf anderem Wege. Wir gehen von den beiden Involutionen (§ 3)

$$g_{\alpha\beta}\, du_\alpha\, \delta u_\beta = 0 \tag{21}$$

und

$$a_{\alpha\beta}\, du_\alpha\, \delta u_\beta = 0 \tag{22}$$

aus. Sollen diese beiden Gleichungen für $du_\alpha$ und $\delta u_\alpha$ zugleich bestehen, so geben die Lösungen offenbar die aufeinander senkrechten entsprechenden Richtungen der Involution (22) an. Wegen (21) kann man (vgl. § 4)

$$\delta u_\beta = \varrho\, \varepsilon^{\beta\delta} g_{\gamma\delta}\, du_\gamma \tag{23}$$

1) Weil die $\varepsilon^{\gamma\delta}$ nach (4, 9) von der Irrationalität $\sqrt{g}$ abhängen.

setzen, wo $\varrho$ ein Proportionalitätsfaktor ist; setzt man (23) in (22) ein, so erhält man die quadratische Gleichung

$$(24) \qquad \psi = \varepsilon^{\beta\delta} a_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} du_\alpha du_\gamma = 0,$$

die bis auf die Bezeichnung der Indizes mit (20) übereinstimmt und deren Lösungen $du_\alpha$ und $\delta u_\alpha$ mit den Lösungen der beiden bilinearen Gleichungen (21) und (22) übereinstimmen. Die beiden Richtungen $du_\alpha$ und $\delta u_\alpha$ stehen aufeinander senkrecht; da sie außerdem reell sind, müssen sie verschieden sein. Daraus folgt, daß die Gleichungen (24) und damit aber auch die Gleichung (15) keine Doppelwurzel haben, solange nicht $\psi$ identisch verschwindet. In diesem Fall sind die beiden Formen $f$ und $\varphi$ proportional, d. h. es gilt $a_{\alpha\beta} = \mu g_{\alpha\beta}$, wie man aus (19) am leichtesten erkennt, und der Quotient $\lambda = \frac{\varphi}{f}$ hat den von der Richtung $du_\alpha$ unabhängigen Wert $\mu$. Wir schließen diesen Fall aus und wählen auf der Fläche solche orthogonale Parameter, daß die Richtungen der 1- und 2-Linie im betrachteten Punkt $P$ mit den Nullrichtungen von $\psi$ übereinstimmen. Ist die Form $\varphi$ in allen Punkten der Fläche definiert, d. h. sind die $a_{\alpha\beta}$ stetige Funktionen der $u_\alpha$, so bestimmt die Gleichung $\psi = 0$ ein orthogonales Kurvennetz auf der Fläche.[1]) Macht man dieses zum Netz der Parameterlinien, so gilt alles folgende nicht nur im Punkt $P$, sondern in allen Punkten der Fläche.

Es muß dann, wenn wir bei den alten Bezeichnungen $u_\alpha$, $a_{\alpha\beta}$ und $g_{\alpha\beta}$ bleiben, (21) und (22) für die beiden Richtungen $(du_1, 0)$ und $(0, du_2)$ gelten, so daß $a_{12} = g_{12} = 0$ ist. Ferner genügt jede dieser beiden Richtungen der Relation (20), weshalb $\psi = k\, du_1\, du_2$ wird. An Stelle von (7) erhalten wir

$$(25) \qquad \lambda = \frac{\varphi}{f} = \frac{a_{11}\, du_1^2 + a_{22}\, du_2^2}{g_{11}\, du_1^2 + g_{22}\, du_2^2} = a_{11}\left(\frac{du_1}{ds}\right)^2 + a_{22}\left(\frac{du_2}{ds}\right)^2,$$

oder wegen (3, 25) und (3, 26)

$$(26) \qquad \lambda = \frac{a_{11}}{g_{11}} \cos^2\vartheta_1 + \frac{a_{22}}{g_{22}} \sin^2\vartheta_1$$

(es ist $\vartheta_2 = \frac{\pi}{2} - \vartheta_1$). Die beiden Wurzeln ${}_{(\alpha)}\lambda$ von (15) ergeben sich für $\vartheta_1 = 0$ bzw. $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$, und zwar wird

$$(27) \qquad {}_{(1)}\lambda = \frac{a_{11}}{g_{11}}, \quad {}_{(2)}\lambda = \frac{a_{22}}{g_{22}}.$$

An Stelle von (26) können wir also schreiben

$$(28) \qquad \lambda = {}_{(1)}\lambda \cos^2\vartheta_1 + {}_{(2)}\lambda \sin^2\vartheta_1.$$

---

1) Vgl. § 8 A.

Wir setzen $\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} = r$ und deuten $r$ und $\vartheta_1$ als Polarkoordinaten, $y_1 = r \cos \vartheta_1$ und $y_2 = r \sin \vartheta_1$ als rechtwinklige kartesische Koordinaten in einer Ebene. Aus (28) folgt dann

$$(29) \qquad {}_{(1)}\lambda\, y_1^2 + {}_{(2)}\lambda\, y_2^2 = \operatorname{sign} \lambda,$$

d. h. die Gleichung eines *Kegelschnittes* (oder zweier), den (oder die) wir die *Indikatrix der quadratischen Form* $\varphi$ nennen. Es ergeben sich folgende Fälle:

I. ${}_{(1)}\lambda\, {}_{(2)}\lambda > 0$, $\varphi$ ist *definit.*

A. ${}_{(1)}\lambda > 0$ (ebenso ${}_{(2)}\lambda$), $\varphi$ ist *positiv definit,* $\operatorname{sign} \lambda = +1$ und (29) eine *Ellipse mit den Halbachsen* $\frac{1}{\sqrt{{}_{(1)}\lambda}}$ *und* $\frac{1}{\sqrt{{}_{(2)}\lambda}}$.

B. ${}_{(1)}\lambda < 0$ (ebenso ${}_{(2)}\lambda$), $\varphi$ ist *negativ definit,* $\operatorname{sign} \lambda = -1$ und (29) ebenfalls eine *Ellipse,* nämlich

$$(30) \qquad -{}_{(1)}\lambda\, y_1^2 - {}_{(2)}\lambda\, y_2^2 = 1.$$

II. ${}_{(1)}\lambda\, {}_{(2)}\lambda < 0$, $\varphi$ ist *indefinit,* (29) *ein Paar konjugierter Hyperbeln,* deren Asymptoten die Gleichungen $y_2 = \pm \sqrt{-\frac{{}_{(1)}\lambda}{{}_{(2)}\lambda}} \cdot y_1$ haben, mit der $y_1$-Achse also den Winkel

$$(31) \qquad \vartheta_1 = \pm \operatorname{arc\,tan} \sqrt{-\frac{{}_{(1)}\lambda}{{}_{(2)}\lambda}}$$

einschließen. Von den beiden konjugierten Hyperbeln (29) dient die eine zur Veranschaulichung der positiven, die andere zur Veranschaulichung der negativen Werte von $\lambda$.

In den ursprünglichen allgemeinen Parametern sind die Richtungen der Asymptoten der Indikatrix durch die Gleichung $\varphi = 0$ gegeben; sie sind reell oder imaginär, je nachdem $\varphi$ indefinit oder definit ist.

## § 6. Die Geometrie auf der Fläche.

Unsere bisherigen Überlegungen zeigen mit genügender Deutlichkeit, welche Bedeutung dem Maßtensor einer Fläche zukommt. Die Formeln (2, 7) sowie (3, 17) bis (3, 26) lassen uns erkennen, daß die Metrik auf der Fläche ausschließlich durch den Maßtensor festgelegt ist, da wir allein mit seiner Hilfe die beiden fundamentalen metrischen Begriffe „Länge“ und „Winkel“ definieren können. Diese Tatsache findet eine wichtige Ergänzung darin, daß auch der *Inhalt o eines Bereiches B* unserer Fläche durch den Maßtensor bestimmt werden kann; man definiert

$$(1) \qquad o = \iint_B \sqrt{g}\, du_1\, du_2.$$

Aus (2, 19) und der Formel für die Transformation eines Doppelintegrals folgt sofort, daß $o$ eine absolute Invariante gegenüber allen zulässigen Parametertransformationen ist und im Fall einer Ebene ($g = 1$) mit der elementaren Inhaltsdefinition übereinstimmt. Wir können also in erschöpfender Weise auf einer Fläche Geometrie treiben, wenn wir von der Fläche nur die erste Grundform, d. h. den Maßtensor kennen. Es liegt die Frage nahe, ob nicht geradezu durch den Maßtensor, d. h. durch Angabe der drei Funktionen $g_{\alpha\beta}(u_1, u_2)$ mit $g > 0$ eine Fläche im Raum vollständig (höchstens bis auf ihre Lage) bestimmt ist, so wie die Raumkurven durch Angabe von Krümmung und Windung. Wir haben aber schon in II, § 5 ein Beispiel kennengelernt, das uns diese Frage verneinen läßt. Wir erwähnten dort, daß die Torsen längentreu auf die Ebene abgebildet werden können, oder wie wir uns auch ausdrückten, auf die Ebene abwickelbar sind, was insbesondere für einen Sonderfall, nämlich für die Kegel und Zylinder unmittelbar anschaulich ist.

Es ist nun ganz leicht, allgemein nachzuweisen, daß die erste Grundform einer Torse bei geeigneter Parameterwahl mit der ersten Grundform der Ebene übereinstimmt. Sehen wir von den Kegeln und Zylindern ab, so wissen wir, daß jede Torse Tangentenfläche einer Raumkurve ist. Auf einer Tangentenfläche läßt sich ein einfaches orthogonales Kurvennetz angeben: es besteht aus den Erzeugenden (Kurventangenten) und den Filarevolventen (orthogonale Trajektorien der Erzeugenden, vgl. II, § 6 D) der Kurve. Wir haben dort

$$x_i = f_i(s) - (s + c) f_i'(s) \tag{2}$$

als Parameterdarstellung der Filarevolventen der Raumkurve $x_i = f_i(s)$ gefunden, wobei $s$ die Bogenlänge, also $f_i' f_i' = 1, f_i' f_i'' = 0$ und $f_i'' f_i'' = \varkappa^2$ das Quadrat der Krümmung von $x_i = f_i(s)$ ist. (2) ist aber zugleich auch schon eine Parameterdarstellung der ganzen Tangentenfläche mit den Parametern $s$ und $c$. Man erkennt, daß die Parameterlinien die oben angegebenen sind, und zwar sind die Kurven $c =$ konst. die Filarevolventen, die Kurven $s =$ konst. die Tangenten. Wegen

$$\frac{\partial x_i}{\partial s} = -(s + c) f_i'' \quad \text{und} \quad \frac{\partial x_i}{\partial c} = -f_i' \tag{3}$$

erhalten wir

$$g_{11} = \frac{\partial x_i}{\partial s}\frac{\partial x_i}{\partial s} = (s + c)^2 \varkappa^2, \quad g_{12} = \frac{\partial x_i}{\partial s}\frac{\partial x_i}{\partial c} = 0, \quad g_{22} = \frac{\partial x_i}{\partial c}\frac{\partial x_i}{\partial c} = 1, \tag{4}$$

also für das Bogenelement $d\sigma$ der Torse

$$d\sigma^2 = (s + c)^2 \varkappa^2 ds^2 + dc^2. \tag{5}$$

Wir betrachten nun noch eine *ebene*, gleichfalls auf ihre Bogenlänge $s$ bezogene Kurve $x_i = \varphi_i(s)$, deren Krümmung in Punkten mit gleichem $s$ den-

selben Wert $\varkappa(s)$ hat wie die Krümmung der Raumkurve $x_i = f_i(s)$, während ihre Torsion selbstverständlich verschwindet. Dann gilt

$$\varphi_i' \varphi_i' = f_i' f_i' = 1\,, \quad \varphi_i' \varphi_i'' = f_i' f_i'' = 0\,, \quad \varphi_i'' \varphi_i'' = f_i'' f_i'' = \varkappa^2,$$

und somit hat die analog zu (2) gebildete, mit einem Teil der Ebene von $x_i = \varphi_i$ zusammenfallende Tangentenfläche

$$\tilde{x}_i = \varphi_i(s) + (s + c)\,\varphi_i'(s) \tag{6}$$

dieser Kurve in den Parametern (krummlinigen Koordinaten) $s$ und $c$ dasselbe quadrierte Bogenelement, d. h. denselben Maßtensor wie die Torse (2), w. z. b. w.

Durch die Angabe der ersten Grundform allein ist also — wenigstens im allgemeinen — keine Fläche eindeutig bestimmt. Wir werden später sehen, daß das erst dann der Fall ist, wenn noch eine zweite quadratische Differentialform — die zweite Grundform — vorgegeben ist. Die erste Grundform allein charakterisiert eine ganze Klasse von Flächen mit der kennzeichnenden Eigenschaft, daß sie aufeinander längentreu abgebildet werden können, d. h. daß die beiden ersten Grundformen zweier Flächen einer solchen Klasse identisch übereinstimmen, sobald die Zuordnung der Punkte derart bestimmt ist, daß entsprechende Punkte gleiche Parameterwerte haben.[1]) Man sagt auch die Flächen einer Klasse seien aufeinander *abwickelbar* oder *verbiegbar* (vgl. II, § 5). Daß es überhaupt verschiedene Flächenklassen gibt, d. h. daß nicht alle Flächen aufeinander abwickelbar sind, ist leicht einzusehen, da sonst alle Flächen auf die Ebene abwickelbar wären. Wir werden schon im nächsten Kapitel zeigen können, daß die Torsen mit Einschluß der Kegel und Zylinder die einzigen Flächen sind, die sich auf die Ebenen abwickeln lassen.

Man pflegt unter *Geometrie auf einer Fläche* alle jene Eigenschaften der Fläche zu verstehen, die sich allein aus dem Maßtensor herleiten lassen. Diese Eigenschaften sind allen Flächen einer Klasse gemeinsam; will man sie behandeln, so kann man von der besonderen Gestalt der Fläche im Raum völlig absehen und hat dann nur eine gewisse, durch die Koordinaten oder Parameter $u_\alpha$ bestimmte Mannigfaltigkeit und auf dieser eine positiv definite quadratische Differentialform als gegeben anzusehen. Dieser fürs erste recht abstrakt aussehende Standpunkt hat doch eine eminente praktische Bedeutung. Gauss, der Begründer der modernen Differentialgeometrie, war zu seinen Untersuchungen durch die Frage angeregt worden, was sich über die Gestalt der

1) Sind zwei Flächen $x_i = f_i(u_1, u_2)$ und $x_i = g_i(v_1, v_2)$ gegeben, so sprechen wir von einer Abbildung der einen Fläche auf die andere, wenn eine Relation $v_\alpha = v_\alpha(u_1, u_2)$ mit allen Eigenschaften einer zulässigen Parametertransformation gegeben ist. Führt man diese Transformation etwa auf der zweiten Fläche tatsächlich aus, so erhält ihre Parameterdarstellung die Form $x_i = \varphi_i(u_1, u_2)$ und entsprechende Punkte haben gleiche Koordinaten (Parameterwerte). Sind dann die beiden Grundformen identisch gleich, so sind die beiden Flächen längentreu aufeinander abgebildet.

Erdoberfläche auf Grund der Resultate von geodätischen Messungen aussagen läßt — man erkennt hierin einen Sonderfall unseres allgemeinen Problems: Man kennt die Geometrie auf einer Fläche, d. h. ihre erste Grundform; welche Eigenschaften sind allen Flächen dieser Klasse gemeinsam? Mit anderen Worten: Welche (Biegungs-)Invarianten lassen sich aus der ersten Grundform herleiten?

Es handelt sich hier um eine Problemstellung, die in voller Klarheit und Allgemeinheit zuerst von RIEMANN formuliert wurde. RIEMANN betrachtet einen $n$ dimensionalen Raum, in dem eine positiv definite quadratische Differentialform gegeben ist. Die allgemeine *Riemannsche Geometrie* des $n$ dimensionalen Raumes $R_n$ wird im zweiten Band behandelt; wir sehen aber, daß unsere Geometrie auf der Fläche identisch ist mit der Riemannschen Geometrie eines zweidimensionalen Raumes $R_2$.[1])

Wir bemerken noch, daß in der Geometrie auf der Fläche eine anschauliche Deutung des Vektors als gerichtete Strecke unmöglich wird, da eine solche Strecke im allgemeinen aus der Fläche herausführt.

## § 7. Konforme Abbildung und isotherme Parameter.

Wir betrachten wieder eine umkehrbar eindeutige stetige Abbildung zweier Flächen aufeinander mit der Eigenschaft, daß entsprechende Punkte durch gleiche Werte der Parameter $u_\alpha$ gegeben sind.[2]) Wir nennen diese Abbildung *konform* oder *winkeltreu*, wenn zwei Kurven auf der einen Fläche, die sich in einem Punkt $P$ unter einem Winkel $\alpha$ schneiden, auf der anderen Fläche zwei Kurven zugeordnet sind, die sich im entsprechenden Punkt $P'$ unter *demselben Winkel* $\alpha$ schneiden. Sind $g_{\alpha\beta}$ und $\gamma_{\alpha\beta}$ die Maßtensoren der beiden Flächen, so muß

$$g_{\alpha\beta}\lambda^\alpha = \sigma(u_1, u_2, \lambda^1, \lambda^2)\,\gamma_{\alpha\beta}\lambda^\alpha \tag{1}$$

für jeden Vektor $\lambda^\alpha$ gelten, da es sonst z. B. einen Vektor $\mu^\alpha$ gäbe, für den $g_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\mu^\beta = 0$, aber $\gamma_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\mu^\beta \neq 0$ wäre. Aus (1) folgt

$$(g_{\alpha\beta} - \sigma\gamma_{\alpha\beta})\lambda^\alpha = 0,$$

d. h. $\sigma$ muß der Gleichung

$$|g_{\alpha\beta} - \sigma\gamma_{\alpha\beta}| = 0$$

1) Auf die Frage, ob sich umgekehrt jeder RIEMANNsche $R_2$ als Fläche eines euklidischen Raumes deuten läßt, können wir nicht näher eingehen. Es handelt sich dabei um die Existenz von Lösungen der Differentialgleichungen (2, 6) für die unbekannten Funktionen $x_i$, die aber wie die meisten Existenzsätze bei partiellen Differentialgleichungen derzeit nur für den Fall *analytischer* $g_{\alpha\beta}$ sichergestellt ist. Vgl. etwa JANET, Ann. de la soc. polonaise de math. V, 1926 und CARTAN, ebenda VI, 1927.

2) Näheres über beliebige umkehrbar eindeutige und stetige Abbildungen von Flächen findet man im folgenden § 8, B.

genügen. Da aber alle in (1) auftretenden Größen stetig sind, muß $\sigma$ mit *einer* der beiden, von $\lambda^\alpha$ offenbar unabhängigen Wurzeln $\sigma_1$ und $\sigma_2$, dieser Gleichung, etwa mit $\sigma_1$, zusammenfallen. Also gilt, wenn wir wieder $\sigma$ statt $\sigma_1$ schreiben, $g_{\alpha\beta}\lambda^\alpha = \sigma(u_1, u_2)\gamma_{\alpha\beta}\lambda^\alpha$ für jeden Vektor $\lambda^\alpha$ und somit auch

$$g_{\alpha\beta} = \sigma\gamma_{\alpha\beta}. \tag{2}$$

Der wesentlich positive Proportionalitätsfaktor $\sigma(u_1, u_2)$ ist nach (2) ebensooft stetig differenzierbar wie die $g_{\alpha\beta}$ und $\gamma_{\alpha\beta}$. Sind $ds$ und $\delta s$ die Bogenelemente entsprechender Kurven auf den beiden Flächen, so folgt aus (2)

$$ds^2 = \sigma\delta s^2. \tag{2'}$$

Einem kontravarianten Vektor $u_1, u_2; du_1, du_2$ der einen Fläche entspricht in der Abbildung der kontravariante Vektor mit denselben Bestimmungsstücken auf der anderen Fläche; aus (2) folgt somit, daß in entsprechenden Punkten die Längen entsprechender Vektoren proportional sind, woraus sich weiter ergibt, daß entsprechende Figuren auf den beiden Flächen in erster Annäherung ähnlich sind, weshalb man die konforme Abbildung auch eine *im Kleinen ähnliche Abbildung* nennt.[1])

Die konforme Abbildung hat *transitiven* Charakter, d. h. sind zwei Flächen $F_1$ und $F_2$ auf eine dritte konform abgebildet, so ist auch jene Abbildung konform, die man erhält, wenn man zwei Punkte von $F_1$ und $F_2$ einander zuordnet, die einem und demselben Punkt der dritten Fläche in den gegebenen Abbildungen entsprechen. Wir beschränken uns weiterhin auf die Untersuchung von Flächen, die auf einer Ebene abbildbar sind[2]), und erhalten dann die allgemeinste konforme Abbildung zweier solcher Flächen, wenn wir jede irgendwie konform auf eine Ebene und dann die beiden Ebenen aufeinander in allgemeinster Weise konform abbilden.

Bekanntlich hat aber unter gewissen Differenzierbarkeitsannahmen die allgemeinste konforme Abbildung zweier Ebenen, auf welchen $p_1, p_2$ bzw. $q_1, q_2$ rechtwinklige kartesische Koordinaten sind, die Form

$$q_1 + iq_2 = f(p_1 + ip_2), \tag{3}$$

1) Damit ist gemeint, daß bei einem Grenzübergang, bei dem sich die Figuren schließlich auf je einen Punkt zusammenziehen, die konforme Abbildung sich immer weniger von einer Ähnlichkeitstransformation unterscheidet. Eine beliebige umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung zweier Flächen erzeugt offenbar in den Tangentenebenen entsprechender Punkte $P$ und $P'$ eine zentroaffine Transformation; ist die Abbildung der Flächen konform, so ist diese Affinität eine Ähnlichkeitstransformation.

2) Das ist natürlich eine gewisse Einschränkung der Allgemeinheit unserer Untersuchungen, da sich nicht jede Fläche konform auf eine Ebene abbilden läßt. (Vgl. die Fußnote 1, S. 112.)

wo $f$ eine willkürliche analytische Funktion der komplexen Veränderlichen $p_1 + i p_2$ ist, d. h. in den Abbildungsgleichungen $q_\alpha = q_\alpha(p_1, p_2)$ ist $q_1$ der Realteil, $q_2$ der Imaginärteil einer analytischen Funktion. Diese beiden Funktionen genügen den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \frac{\partial q_2}{\partial p_2}, \quad \frac{\partial q_1}{\partial p_2} = -\frac{\partial q_2}{\partial p_1} \tag{4}$$

(Cauchy-Riemann) und

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial p_1^2} + \frac{\partial^2 q_1}{\partial p_2^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 q_2}{\partial p_1^2} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial p_2^2} = 0 \tag{5}$$

(Laplace). Die Gleichungen (5) sind die Integrabilitätsbedingungen von (4); sie ergeben sich aus (4) durch Differentiation und Gleichsetzen der gemischten Ableitungen.

Wir suchen also eine konforme Abbildung einer Fläche $x_i = x_i(u_1, u_2)$ auf eine Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten $p_1, p_2$. Das Bogenelement einer Kurve in dieser Ebene ist $\delta s^2 = dp_1^2 + dp_2^2$. Zu bestimmen sind zwei Funktionen

$$p_\alpha = p_\alpha(u_1, u_2), \tag{6}$$

so daß das Bogenelement einer Flächenkurve die Form

$$ds^2 = \sigma\,(dp_1^2 + dp_2^2) \tag{7}$$

annimmt, wenn wir auf der Fläche die $p_\alpha$ als Parameter nehmen. Ist $g_{\alpha\beta}$ in den Veränderlichen $u_\alpha$ bzw. $\bar{g}_{\alpha\beta}$ in den $p_\alpha$ der Maßtensor der Fläche, so muß

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \sigma \delta_{\alpha\beta} \tag{8}$$

sein. Die Kurven $p_1 =$ konst., $p_2 =$ konst. bilden wegen (7) oder (8) ein orthogonales Netz auf der Fläche, da außerdem $\bar{g}_{11} = \bar{g}_{22}$ ist, sagt man, daß dieses Netz die Fläche in (infinitesimale) Quadrate zerlegt. Die vier Kurven $p_1 = c_1$, $p_2 = c_2$, $p_1 = c_1 + \varepsilon$, $p_2 = c_2 + \varepsilon$ bilden in der Tat in erster Annäherung ein Quadrat (vgl. § 8, insbes. Fig. 8). Derartige Parameter, für die das quadrierte Bogenelement der Fläche die Form (7) hat, heißen *isotherme Parameter.*

Nach (8, 7) ist

$$\bar{g}^{\gamma\delta} = \frac{1}{\sigma}\,\delta_{\gamma\delta} \tag{9}$$

gleichbedeutend mit (8); wegen

$$\bar{g}^{\gamma\delta} = \frac{\partial p_\gamma}{\partial u_\alpha}\,\frac{\partial p_\delta}{\partial u_\beta}\,g^{\alpha\beta}$$

folgt aus (9)

$$g^{\alpha\beta}\,\frac{\partial p_\gamma}{\partial u_\alpha}\,\frac{\partial p_\sigma}{\partial u_\beta} = \frac{1}{\sigma}\,\delta_{\gamma\sigma} \tag{10}$$

und umgekehrt ist durch je drei Lösungen $p_1, p_2, \sigma$ dieser Gleichungen eine konforme Abbildung unserer Fläche auf die Ebene bestimmt. Die gesuchten Funktionen $p_\alpha(u_1, u_2)$ allein genügen somit den Differentialgleichungen

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial p_1}{\partial u_\alpha}\frac{\partial p_1}{\partial u_\beta} = g^{\alpha\beta}\frac{\partial p_2}{\partial u_\alpha}\frac{\partial p_2}{\partial u_\beta} \tag{11}$$

und

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial p_1}{\partial u_\alpha}\frac{\partial p_2}{\partial u_\beta} = 0, \tag{12}$$

die bzw. mit $\bar{g}_{11} = \bar{g}_{22}$ und $\bar{g}_{12} = 0$ gleichbedeutend sind. (12) muß also die Orthogonalitätsbedingung der Scharen $p_1 = \text{konst.}$, $p_2 = \text{konst.}$ sein. Ist nämlich $du_\alpha$ die Tangentenrichtung einer Kurve $\varphi(u_1, u_2) = \text{konst.}$, so gilt $\frac{\partial \varphi}{\partial u_\alpha} du_\alpha = 0$ und daraus folgt, daß $\frac{\partial \varphi}{\partial u_\alpha}$ der Normalenvektor der Kurve ist (in analogem Sinn wie bei ebenen Kurven, d. h. ein zum Tangentenvektor senkrechter Flächenvektor). Der Winkel zweier Kurven $p_1 = \text{konst.}$ und $p_2 = \text{konst.}$ stimmt aber offenbar mit dem Winkel der Normalenvektoren überein, und somit ist (12) tatsächlich die Orthogonalitätsbedingung. (11) sagt aus, daß die beiden Normalenvektoren im Schnittpunkt zweier Kurven $p_1 = \text{konst.}$ und $p_2 = \text{konst.}$ gleiche Längen haben.

Die Orthogonalitätsbedingung (12) können wir mittels des kontravarianten $\varepsilon$-Tensors (§ 4) in der Form

$$\frac{\partial p_1}{\partial u_\alpha} = \psi g_{\alpha\varkappa}\varepsilon^{\varkappa\lambda}\frac{\partial p_2}{\partial u_\lambda} \tag{13}$$

ansetzen; es folgt wegen (3, 8) und (4, 21)

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial p_1}{\partial u_\alpha}\frac{\partial p_1}{\partial u_\beta} = \psi^2 g^{\alpha\beta} g_{\alpha\varkappa} g_{\beta\mu}\varepsilon^{\varkappa\lambda}\varepsilon^{\mu\nu}\frac{\partial p_2}{\partial u_\lambda}\frac{\partial p_2}{\partial u_\nu}$$
$$= \psi^2 g_{\varkappa\mu}\varepsilon^{\varkappa\lambda}\varepsilon^{\mu\nu}\frac{\partial p_2}{\partial u_\lambda}\frac{\partial p_2}{\partial u_\nu} = \psi^2 g^{\lambda\nu}\frac{\partial p_2}{\partial u_\lambda}\frac{\partial p_2}{\partial u_\nu},$$

also wegen (11) $\psi^2 = 1$, $\psi = \pm 1$. Wir können $\psi = 1$ nehmen, da eine Änderung von $p_2$ in $-p_2$ ohne Einfluß auf die Gleichungen (11) und (12) ist. Die Gleichungen (13) lauten somit

$$\frac{\partial p_1}{\partial u_\alpha} = g_{\alpha\varkappa}\varepsilon^{\varkappa\lambda}\frac{\partial p_2}{\partial u_\lambda}. \tag{14}$$

Um nach den $\frac{\partial p_2}{\partial u_\lambda}$ aufzulösen, überschieben wir (14) mit $\varepsilon^{\alpha\iota}$ und erhalten

$$\varepsilon^{\alpha\iota}\frac{\partial p_1}{\partial u_\alpha} = g^{\iota\lambda}\frac{\partial p_2}{\partial u_\lambda}$$

und daraus durch nochmalige Überschiebung mit $g_{\iota\varkappa}$

$$g_{\iota\varkappa}\varepsilon^{\alpha\iota}\frac{\partial p_1}{\partial u_\alpha} = \frac{\partial p_2}{\partial u_\varkappa}$$

oder

(15) $$\frac{\partial p_2}{\partial u_\alpha} = - g_{\alpha\varkappa} \varepsilon^{\varkappa\lambda} \frac{\partial p_1}{\partial u_\lambda}.$$

Die Gleichungen (14) und (15) sind Verallgemeinerungen der CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen (4). Sind nämlich schon die $u_\alpha$ isotherme Parameter, so ist $g^{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu}\delta_{\alpha\beta}$, und wegen (4, 19) ergeben sich aus (14) oder (15) tatsächlich die Gleichungen (4). Man sieht daraus, daß die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen nicht nur für die konforme Abbildung von Ebenen, sondern allgemeiner für die konforme Abbildung beliebiger Flächen gelten, wenn diese nur auf isotherme Parameter bezogen sind.

Ganz analog werden wir die Verallgemeinerung der LAPLACEschen Differentialgleichung (5) erhalten, wenn wir die Integrabilitätsbedingungen für (14) und (15) aufstellen. Beginnen wir etwa mit (14). Die Bedingung $\frac{\partial^2 p_1}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_2 \partial u_1}$ schreiben wir in der Form

$$\varepsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial u_\beta}\left(g_{\alpha\varkappa} \varepsilon^{\varkappa\lambda} \frac{\partial p_2}{\partial u_\lambda}\right) = 0;$$

ziehen wir noch den konstanten Ausdruck $\sqrt{g}\,\varepsilon^{\alpha\beta}$ in die Klammer, so wird

$$\varepsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial u_\beta}\left(g_{\alpha\varkappa}\varepsilon^{\varkappa\lambda} \frac{\partial p_1}{\partial u_\lambda}\right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u_\beta}\left(\sqrt{g}\, g_{\alpha\varkappa} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\varkappa\lambda} \frac{\partial p_2}{\partial u_\lambda}\right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u_\beta}\left(\sqrt{g}\, g^{\beta\lambda} \frac{\partial p_2}{\partial u_\lambda}\right)$$

und wir erhalten endgültig

(16) $$\frac{\partial}{\partial u_\beta}\left(\sqrt{g}\, g^{\alpha\beta} \frac{\partial p_2}{\partial u_\alpha}\right) = 0.$$

Eine analoge Formel für $p_1$ erhält man aus (15). Für isotherme Parameter $u_\alpha$ geht (16) in die LAPLACEsche Gleichung (5) für $p_2$ über.

Also gilt:

*Notwendig und hinreichend dafür, daß sich eine Fläche auf isotherme Parameter beziehen und damit konform auf die Ebene abbilden läßt, ist, daß die Differentialgleichung* (16) *Lösungen besitzt.*[1]) Zu jeder Lösung $p_2 =$ konst. von (16) erhält man aus (14) die zweite Schar $p_1 =$ konst. eines Isothermennetzes, und zwar durch eine bloße Quadratur, da

$$dp_1 = \frac{\partial p_1}{\partial u_\alpha} du_\alpha = g_{\alpha\varkappa} \varepsilon^{\varkappa\lambda} \frac{\partial p_2}{\partial u_\lambda} du_\alpha$$

gerade wegen (16) ein vollständiges Differential ist.[2])

1) Das ist sicher der Fall, wenn die $g_{\alpha\beta}$ analytische Funktionen der $u_\alpha$ sind. Allgemeinere Bedingungen bei LICHTENSTEIN, Abh. d. Berl. Akademie 1911 und Bull. de l'acad. de Cracovie, 1916.

2) Eine andere, nicht wesentlich verschiedene Methode zur Bestimmung isothermer Parameter geben wir in § 8A.

Die Parameter $u_\alpha$ (oder das Netz $u_\alpha =$ konst.) heißen *isometrisch*, wenn die erste Grundform das Aussehen

$$ds^2 = \lambda(u_1, u_2)\,[f_1(u_1)\,du_1^2 + f_2(u_2)\,du_2^2] \tag{17}$$

hat. Notwendig und hinreichend dafür ist, daß $g_{12} = 0$ und der Quotient $\frac{g_{11}}{g_{22}}$ der Quotient aus einer Funktion von $u_1$ allein und einer Funktion von $u_2$ allein ist. Letztere Bedingung kann man auch

$$\frac{\partial^2 \ln \frac{g_{11}}{g_{22}}}{\partial u_1 \partial u_2} = 0 \tag{18}$$

schreiben. Aus isometrischen Parametern erhält man isotherme durch Quadraturen

$$p_1 = \int \sqrt{f_1}\, du_1, \quad p_2 = \int \sqrt{f_2}\, du_2. \tag{19}$$

Wir stellen uns zum Schluß noch die Frage, wann eine gegebene Kurvenschar $\varphi(u_1, u_2) =$ konst., wo $\varphi$ mindestens zweimal stetig differenzierbar ist, sich zu einem Isothermennetz ergänzen läßt. Eine hinreichende Bedingung ist offenbar (16), wo nur $\varphi$ statt $p_2$ zu setzen ist, aber die Bedingung ist nicht notwendig. In der Tat wird ja dieselbe Kurvenschar auch durch $F(\varphi(u_1, u_2))$ $=$ konst. dargestellt, wenn $F(\varphi)$ eine zweimal stetig differenzierbare monotone Funktion mit geeignetem Definitionsbereich ist. Wir setzen zur Abkürzung[1])

$$\nabla \varphi = g^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial u_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial u_\beta} \tag{20}$$

---

1) Man nennt die Differentialoperatoren $\nabla$ und $\Delta$ den ersten und zweiten Beltramischen *Differentialparameter* oder *Differentiator*. Daneben betrachtet man noch den gemischten Differentiator

$$\nabla(\varphi, \psi) = g^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial u_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial u_\beta}.$$

Alle Differentiatoren sind Operatoren, die aus gegebenen Invarianten $\varphi$, $\psi$ neue herzuleiten gestatten. Bei $\nabla \varphi$ und $\nabla(\varphi, \psi)$ ergibt sich das unmittelbar aus unserem allgemeinen Satz, daß durch Überschiebungen von Tensoren (und Vektoren) stets wieder Tensoren, Vektoren oder Invarianten entstehen. Beim zweiten Differentiator ist die Invarianz nicht so unmittelbar einzusehen. Führt man die in (21) rechts angedeutete Differentiation aus, so treten unter anderem die Ableitungen des Maßtensors und die zweiten Ableitungen der Invariante $\varphi$ auf. Weder die ersteren, noch die letzteren sind aber Tensoren, auch ist $\sqrt{g}$ keine Invariante. Man kann aber durch eine etwas umständliche Rechnung die Invarianz von $\Delta \varphi$ aus den Transformationsformeln der einzelnen Faktoren oder einfacher durch den Nachweis bestätigen, daß $\varepsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial u_\beta}$ für jeden kovarianten Vektor $\lambda_\alpha$ eine Invariante ist. Wir übergehen hier diese Rechnung, da sich der Beweis unmittelbar aus einem anderen, wesentlich einfacheren Ausdruck für $\Delta \varphi$ ergeben wird (V, § 2C).

und

$$\Delta \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u_\beta}\left(\sqrt{g}\, g^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial u_\alpha}\right). \tag{21}$$

Dann ist die Existenz einer Funktion $F(\varphi)$, für die

$$\Delta F(\varphi) = 0 \tag{22}$$

gilt, eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $F(\varphi) =$ konst. eine isotherme Schar ist. Nun ist

$$\begin{aligned}\Delta F(\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u_\beta}\left(\sqrt{g}\, g^{\alpha\beta} \frac{\partial F(\varphi)}{\partial u_\alpha}\right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u_\beta}\left(\sqrt{g}\, g^{\alpha\beta} F'(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial u_\alpha}\right)\\ &= F''(\varphi)\, g^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial u_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial u_\beta} + \frac{1}{\sqrt{g}} F'(\varphi) \frac{\partial}{\partial u_\beta}\left(\sqrt{g}\, g^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial u_\alpha}\right)\\ &= F''(\varphi)\, \nabla \varphi + F'(\varphi)\, \Delta \varphi.\end{aligned}$$

Somit ist wegen (22) der Quotient

$$\frac{\Delta \varphi}{\nabla \varphi} = -\frac{F''(\varphi)}{F'(\varphi)} \tag{23}$$

eine Funktion von $\varphi$ allein. Ist umgekehrt

$$\frac{\Delta \varphi}{\nabla \varphi} = f(\varphi), \tag{24}$$

so wird wegen (23) $\qquad F'(\varphi) = e^{-\int f(\varphi)\, d\varphi},$

woraus man durch eine weitere Quadratur $F(\varphi)$ und damit die isotherme Schar $F(\varphi(u_1, u_2)) =$ konst. findet. Eine zugehörige zweite Isothermenschar $p_1(u_1, u_2)$ erhält man dann aus (14), wenn man $p_2(u_1, u_2) = F(\varphi(u_1, u_2))$ setzt.

## § 8. Ergänzungen.

**A. Die Integralkurven linearer und quadratischer Differentialgleichungen. Ametrische Parameter.** Eine lineare Differentialgleichung

$$a_\alpha\, du_\alpha = 0 \tag{1}$$

besitzt nach fundamentalen Sätzen aus der Theorie der Differentialgleichungen stets Lösungen

$$f(u_1, u_2) = \text{konst.}, \tag{2}$$

wenn die $a_\alpha$ entweder reelle Funktionen reeller Veränderlicher $u_\alpha$ sind und der Quotient $\frac{a_2}{a_1}$ der Lipschitz-Bedingung genügt. oder wenn sie analytische Funktionen komplexer Veränderlicher $u_\alpha$ sind. Immer existiert dann eine

als *Multiplikator* oder *integrierender Faktor* bezeichnete Funktion $\lambda(u_1, u_2)$, so daß

$$df = \lambda a_\alpha \, du_\alpha \tag{3}$$

ist. Deuten wir uns die $u_\alpha$ als Koordinaten auf einer Fläche[1]), so stellt (2) eine Schar von $\infty^1$ Kurven dar (einparametrige Schar), die die Fläche in einem bestimmten Bereich *schlicht*, d. h. so überdecken, daß durch jeden Punkt eine und nur eine Kurve der Schar hindurchgeht. Man spricht kurz von einer (einparametrigen) Kurvenschar auf der Fläche.

Sei nun eine quadratische Differentialgleichung

$$a_{\alpha\beta} \, du_\alpha \, du_\beta = 0 \tag{4}$$

gegeben. Die Koeffizienten $a_{\alpha\beta}$ seien zunächst als reelle Funktionen der reellen Veränderlichen $u_\alpha$ vorausgesetzt. Die quadratische Differentialform auf der linken Seite von (4) läßt sich stets in ein Produkt zweier Linearformen zerlegen, die aber nur dann reell sind, wenn die Diskriminante der Form nicht positiv ist. Ist die Diskriminante negativ und genügen die Koeffizienten der Faktoren der Lipschitz-Bedingung, so sind durch (4) zwei Kurvenscharen definiert, deren jede die Fläche in einem bestimmten Bereich schlicht überdeckt, so daß durch jeden Punkt dieses Bereiches zwei Kurven, je eine aus jeder Schar, hindurchgehen. Man spricht von einem *Kurvennetz* auf der Fläche. Ein besonders einfaches Beispiel eines Kurvennetzes bilden die Parameterkurven $u_\alpha =$ konst., deren Differentialgleichung $du_1 \, du_2 = 0$ lautet und somit von der Form (4) und zwar reell zerlegbar ist. Verschwindet die Diskriminante von (4), so sind die Linearfaktoren stets reell und höchstens durch einen Faktor verschieden, so daß kein Netz, sondern nur eine Kurvenschar definiert ist.

Ist die Diskriminante der Form positiv, so sind die Linearfaktoren komplexe Funktionen der reellen $u_\alpha$. Ist $a_\alpha \, du_\alpha$ einer der beiden Linearfaktoren, so ist die Integration der Differentialgleichung (1) im Reellen natürlich unmöglich, da durch (1) in jedem Flächenpunkt eine imaginäre Richtung definiert ist, die notwendig aus der reellen Fläche herausführt, also nie Tangente einer auf dieser Fläche verlaufenden Kurve sein kann. Dagegen hat die Frage nach einem Paar von Funktionen $f$ und $\lambda$, für die (3) gilt, einen Sinn. Dabei sind $f$ und $\lambda$ komplexe Funktionen der reellen $u_\alpha$. Die $a_{\alpha\beta}$, und damit auch die $a_\alpha$, seien zweimal stetig differenzierbar. Wegen $df = \frac{\partial f}{\partial u_\alpha} du_\alpha$ folgt, da (3)

1) In der Theorie der Differentialgleichungen sagt man gewöhnlich Ebene statt Fläche, was natürlich gleichgültig ist, da man dabei nicht an eine bestimmte, z. B. euklidische Maßbestimmung denken muß.

identisch in den $du_\alpha$ gelten muß, durch Elimination von $\lambda$

(5) $$a_2 \frac{\partial f}{\partial u_1} - a_1 \frac{\partial f}{\partial u_2} = 0.$$

Wir setzen ($i^2 = -1$)

(6) $$a_\alpha = \varrho_\alpha + i\sigma_\alpha, \quad f = \varphi + i\psi$$

und erhalten aus (5) durch Trennung von Reellem und Imaginärem die beiden Gleichungen

$$\varrho_2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} - \sigma_2 \frac{\partial \psi}{\partial u_1} - \varrho_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} + \sigma_1 \frac{\partial \psi}{\partial u_2} = 0, \quad \sigma_2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + \varrho_2 \frac{\partial \psi}{\partial u_1} - \sigma_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} - \varrho_1 \frac{\partial \psi}{\partial u_2} = 0.$$

Eliminieren wir aus diesen einmal $\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}$ und einmal $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}$, so ergibt sich

(7) $$\begin{cases} (\varrho_1\sigma_2 - \varrho_2\sigma_1) \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = -(\varrho_1\varrho_2 + \sigma_1\sigma_2) \frac{\partial \psi}{\partial u_1} + (\varrho_1^2 + \sigma_1^2) \frac{\partial \psi}{\partial u_2}, \\ (\varrho_1\sigma_2 - \varrho_2\sigma_1) \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = -(\varrho_2^2 + \sigma_2^2) \frac{\partial \psi}{\partial u_1} + (\varrho_1\varrho_2 + \sigma_1\sigma_2) \frac{\partial \psi}{\partial u_2}. \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen sind Verallgemeinerungen der CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen (7, 4), die sich daraus für $a_1 = 1$, $a_2 = i$ ergeben. Ihre Integrabilitätsbedingung lautet

(8) $$\frac{\partial}{\partial u_1}\left[\frac{-(\varrho_2^2 + \sigma_2^2)\frac{\partial \psi}{\partial u_1} + (\varrho_1\varrho_2 + \sigma_1\sigma_2)\frac{\partial \psi}{\partial u_2}}{\varrho_1\sigma_2 - \varrho_2\sigma_1}\right] = \frac{\partial}{\partial u_2}\left[\frac{-(\varrho_1\varrho_2 + \sigma_1\sigma_2)\frac{\partial \psi}{\partial u_1} + (\varrho_1^2 + \sigma_1^2)\frac{\partial \psi}{\partial u_2}}{\varrho_1\sigma_2 - \varrho_2\sigma_1}\right]$$

und ist analog eine Verallgemeinerung der LAPLACEschen Differentialgleichung (6, 5). Also:

*Notwendig und hinreichend für die Existenz einer Funktion* $f(u_1, u_2)$, *für die* (3) *gilt, ist, daß die Gleichung* (8) *Lösungen besitzt.*

Ist die Form $a_{\alpha\beta}\, du_\alpha du_\beta$ identisch mit der ersten Grundform, also $a_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$, so liegt wegen $g > 0$ der eben behandelte Fall vor. Ist

$$g_{\alpha\beta}\, du_\alpha du_\beta = g_\alpha du_\alpha \bar{g}_\beta du_\beta,$$

wo die $g_\alpha$ und $\bar{g}_\alpha$ konjugiert imaginär sind, die Zerlegung der ersten Grundform in Linearfaktoren, so ist ($g_{\alpha\beta}$ ist symmetrisch!)

$$g_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(g_\alpha \bar{g}_\beta + \bar{g}_\alpha g_\beta).$$

Wir setzen wieder $g_\alpha = \varrho_\alpha + i\sigma_\alpha$, so daß $\bar{g}_\alpha = \varrho_\alpha - i\sigma_\alpha$ ist. Dann wird

(9) $$g_{\alpha\beta} = \varrho_\alpha\varrho_\beta + \sigma_\alpha\sigma_\beta$$

und

(10) $$g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = (\varrho_1 \sigma_2 - \varrho_2 \sigma_1)^2.$$

Aus (7) folgt nach einer einfachen Umformung unter Benützung des kontravarianten Maßtensors wegen (9) und (10)

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\left[\sqrt{g}\left(g^{11}\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + g^{12}\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial u_2}\left[\sqrt{g}\left(g^{21}\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + g^{22}\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\sqrt{g}\, g^{\alpha\beta}\frac{\partial \varphi}{\partial u_\beta}\right) = 0;$$

was aber bis auf den Faktor $\frac{1}{\sqrt{g}}$ dieselbe Gleichung

(11) $$\Delta \psi = 0$$

ist, deren Lösbarkeit wir in § 7 als notwendige und hinreichende Bedingung dafür erkannten, daß sich auf einer Fläche isotherme Parameter einführen lassen. Nun wird aber. da $\lambda \bar{\lambda} = \mu^{-2}$ reell und positiv ist,

$$g_{\alpha\beta}\, du_\alpha\, du_\beta = \mu^2 df\, d\bar{f},$$

oder wegen (6) $$g_{\alpha\beta}\, du_\alpha\, du_\beta = \mu^2 (d\varphi^2 + d\psi^2),$$

so daß $\varphi$ und $\psi$ isotherme Parameter sind. Wir haben auf diese Art eben einen zweiten Zugang zu diesen Parametern gefunden und es ist klar, daß wir dabei mit Notwendigkeit auf dieselbe Existenzbedingung (11) stoßen mußten wie in § 7.

Sind in (4) die $a_{\alpha\beta}$ analytische Funktionen komplexer $u_\alpha$, so gilt dasselbe für die Koeffizienten der Linearfaktoren und (4) definiert stets ein (komplexes) Kurvennetz. Insbesondere besteht das durch $g_{\alpha\beta}\, du_\alpha\, du_\beta = 0$ definierte Netz aus lauter ametrischen Kurven (es ist ja $ds^2 = 0$). Machen wir diese zu Parameterlinien — man spricht dann von *ametrischen Parametern* — so wird

(12) $$g_{11} = g_{22} = 0,$$

also

(13) $$ds^2 = g_{12}\, du_1\, du_2.$$

*Ametrische Parameter lassen sich nur auf analytischen Flächen des komplexen Raumes einführen.*

**B. Die allgemeine ein-eindeutige und stetige Abbildung zweier Flächen.** Die beiden Flächen

(14) $$x_i = f_i(u_1, u_2)$$

und

(15) $$x_i = g_i(v_1, v_2)$$

seien durch die Gleichungen

(16) $$v_\alpha = v_\alpha(u_1, u_2),$$

wo die beiden Funktionen $v_\alpha(u_1, u_2)$ alle Eigenschaften einer zulässigen (§ 1) Parametertransformation haben, aufeinander abgebildet. Es seien $P(u_1, u_2)$ und $Q(v_1, v_2)$ entsprechende Punkte. Zwischen den beiden Büscheln der Richtungen $du_1 : du_2$ in $P$ und $dv_1 : dv_2$ in $Q$ besteht die homogene lineare, also projektive Verwandtschaft

$$dv_\alpha = \frac{\partial v_\alpha}{\partial u_\beta} du_\beta, \tag{17}$$

woraus folgt, daß *je vier Richtungen des Büschels P auf vier Richtungen des Büschels Q abgebildet werden, deren Doppelverhältnisse übereinstimmen.*

Wir führen auf der Fläche (15) die Parametertransformation (16) aus; entsprechende Punkte sind dann auf den beiden Flächen durch gleiche Parameterwerte gegeben. Sei $f = ds^2 = g_{\alpha\beta}\, du_\alpha\, du_\beta$ die erste Grundform der Fläche (14), $\varphi = d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, du_\alpha\, du_\beta$ die der Fläche (15). Wir haben in § 5 eine ausführliche Behandlung der Paare quadratischer Formen gegeben und können die Resultate von dort ohne weiteres verwenden, wenn wir $a_{\alpha\beta}$ durch $\gamma_{\alpha\beta}$ ersetzen. Die Form $\varphi$ ist hier positiv definit, die Gleichung (5, 22) definiert die Rechtwinkelinvolution auf der zweiten Fläche und das identische Verschwinden der Simultankovariante $\psi$, d. h. die Proportionalität der beiden Grundformen, charakterisiert die konformen Abbildungen.

Ist $\psi$ nicht identisch Null, so bilden die Integralkurven der Gleichung $\psi = 0$ auf jeder der beiden Flächen[1]) ein Orthogonalsystem; diese beiden Orthogonalsysteme sind die einzigen, die einander in der Abbildung entsprechen.

Die Charakteristik von $\varphi$ ist eine Ellipse (Fall I) und wird hier als *Tissotsche Indikatrix* bezeichnet. Man kann ihr folgende anschauliche Deutung geben: Wir legen in zwei entsprechenden Punkten $P$ und $P'$ die Tangentenebenen an die beiden Flächen. Die Endpunkte aller von $P$ ausgehenden Vektoren von der festen Länge $ds$ liegen auf einem Kreis mit dem Radius $ds$ und dem Mittelpunkt $P$; die Endpunkte der diesen Vektoren entsprechenden, von $P'$ ausgehenden Vektoren von der Länge $d\sigma$ liegen dann auf einer Ellipse mit dem Mittelpunkt $P'$. Diese Ellipse ist die Tissotsche Indikatrix der Form $d\sigma^2 = \varphi$ im Punkt $P'$. Die Achsenrichtungen sind die Nullrichtungen der Form $\psi$ in $P'$. Nimmt man etwa $ds = 1$, so wird nach (5, 7) $d\sigma = \sqrt{\lambda}$ und statt (5, 28) können wir

$$d\sigma^2 = d_1\sigma^2 \cos^2 \vartheta_1 + d_2\sigma^2 \sin^2 \vartheta_1 \tag{18}$$

1) Die Gleichung (5, 20) ist nicht symmetrisch in den $a_{\alpha\beta}$ und $g_{\alpha\beta}$, da die $\varepsilon^{\alpha\beta}$ bezüglich der $g_{\alpha\beta}$ gebildet sind; diese Unsymmetrie verschwindet jedoch, wenn man den Faktor $\frac{1}{\sqrt{g}}$ aus (5, 20) wegläßt. Man kommt dann genau zu den symmetrischen Gleichungen (5, 18) und (5, 19).

schreiben. Dabei sind $d_1\sigma$ und $d_2\sigma$ die Längen der Vektoren in den Nullrichtungen von $\psi$, sie sind die Extremwerte aller $d\sigma$. Man kann somit die Integralkurven von $\psi = 0$ auf den beiden Flächen als *Kurven extremer Verzerrung* bezeichnen.

**C. Die konforme Abbildung der Drehflächen und der Einheitskugel auf die Ebene.** Wir betrachten die durch Umdrehung der Kurve

$$x_1 = \varphi(u_1), \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \psi(u_1) \tag{19}$$

um die $x_3$-Achse entstehende Drehfläche

$$x_1 = \varphi(u_1) \cos u_2, \quad x_2 = \varphi(u_1) \sin u_2, \quad x_3 = \psi(u_1). \tag{20}$$

Die beiden Funktionen $\varphi$ und $\psi$ setzen wir als stetig differenzierbar, $\varphi$ außerdem als positiv voraus. Es ist

$$g_{11} = \varphi'^2 + \psi'^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = \varphi^2 \tag{21}$$

und

$$ds^2 = (\varphi'^2 + \psi'^2)\, du_1^2 + \varphi^2 du_2^2. \tag{22}$$

Somit sind

$$p_1 = \int \frac{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}{\varphi}\, du_1, \quad p_2 = u_2 \tag{23}$$

isotherme Parameter. Deuten wir $p_1, p_2$ als rechtwinklige kartesische Koordinaten in einer Ebene, so sind (23) die Gleichungen einer konformen Abbildung der Fläche (20) auf die Ebene, bei der die Meridiane und Parallelkreise auf die beiden Scharen der achsenparallelen Geraden abgebildet werden. Den übrigen Geraden der Ebene entsprechen die *Loxodromen* auf der Fläche, d. h. jene Kurven, die die Meridiane (und ebenso die Parallelkreise) unter festem Winkel schneiden.[1]) Die erste Grundform der Fläche wird in den Parametern $p_1, p_2$

$$ds^2 = \varphi(u_1)^2 (dp_1^2 + dp_2^2), \tag{24}$$

wo in $\varphi(u_1)$ noch $p_1$ statt $u_1$ einzuführen ist.

Wir betrachten noch insbesondere die Einheitskugel

$$x_1 = \cos u_1 \cos u_2, \quad x_2 = \cos u_1 \sin u_2, \quad x_3 = \sin u_1, \tag{25}$$

die sich aus (20) für $\varphi(u_1) = \cos u_1$, $\psi(u_1) = \sin u_1$ ergibt. In dem Intervall $-\frac{\pi}{2} < u_1 < +\frac{\pi}{2}$ ist $\cos u_1 > 0$. Aus (23) folgt

1) Unabhängig von Drehflächen kann man nach Scheffers die Loxodromen als jene Kurven erklären, die ein Ebenenbüschel unter festem Winkel schneiden; sie sind also eine Verallgemeinerung der Böschungslinien (II, § 7 B).

(26) $$p_1 = \int_0^{u_1} \frac{du_1}{\cos u_1} = \ln \tan\left(\frac{u_1}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \quad p_2 = u_2$$

und daraus[1])

(27) $$\cos u_1 = \frac{1}{\operatorname{ch} p_1}, \quad \sin u_1 = \operatorname{th} p_1.$$

Also ist

(28) $$x_1 = \frac{\cos p_2}{\operatorname{ch} p_1}, \quad x_2 = \frac{\sin p_2}{\operatorname{ch} p_1}, \quad x_3 = \operatorname{th} p_1$$

die Parameterdarstellung und

(29) $$ds^2 = (1 - \operatorname{th}^2 p_1)(dp_1^2 + dp_2^2)$$

das quadrierte Bogenelement der Einheitskugel in den isothermen Parametern $p_\alpha$.[2])

**D. Inhaltstreue Abbildungen.** Eine Fläche heißt *inhalts-* oder *flächentreu* auf eine Ebene abgebildet, wenn die Flächeninhalte entsprechender Figuren übereinstimmen. Sind $v_1$, $v_2$ rechtwinklige kartesische Koordinaten in der Ebene und (16) die Abbildungsgleichungen, so ist nach (6, 1)

(30) $$\frac{\partial(v_1, v_2)}{\partial(u_1, u_2)} = \sqrt{g}$$

eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Abbildung inhaltstreu ist.

Es läßt sich leicht zeigen, daß eine inhaltstreue Abbildung nur dann zugleich konform ist, wenn sie längentreu ist. Wir schreiben (30) in der Form

(31) $$\varepsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial v_1}{\partial u_\alpha} \frac{\partial v_2}{\partial u_\beta} = 1\,;$$

daneben müssen noch die Gleichungen (7, 10) (wo $v$ statt $p$ zu setzen ist) und die daraus folgenden bestehen. Setzen wir (7, 14) in (31) ein, so folgt

(32) $$\varepsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial v_1}{\partial u_\alpha} \frac{\partial v_2}{\partial u_\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta} g_{\alpha\varkappa} \varepsilon^{\varkappa\lambda} \frac{\partial v_2}{\partial u_\lambda} \frac{\partial v_2}{\partial u_\beta} = g^{\beta\lambda} \frac{\partial v_2}{\partial u_\beta} \frac{\partial v_2}{\partial u_\lambda} = \frac{1}{\lambda},$$

also muß $\lambda = 1$ sein, wie behauptet.

Ist die vorgelegte Fläche eine Drehfläche (20), so läßt sich, wenn $u_1$ die Bogenlänge der Meridiane bedeutet, eine inhaltstreue Abbildung durch eine

1) $u_1$ ist die Hyperbelamplitude (GUDERMANNscher Winkel). Formeln bei JAHNKE-EMDE, *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven*. 2. Aufl., Leipzig 1927. Wir bezeichnen $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x$ (Hyperbelsinus), $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x$ (Hyperbelkosinus) und $\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x$ (Hyperbeltangens).

2) Die durch (28) vermittelte konforme Abbildung der Kugel auf die Ebene liegt der bekannten *Mercatorkarte (Seekarte)* zugrunde.

Quadratur ermitteln. Die beiden Funktionen $\varphi$ und $\psi$ sind wieder als stetig differenzierbar anzunehmen, $\varphi$ sei wieder positiv. Es gilt dann

(33) $$\varphi'^2 + \psi'^2 = 1$$

und aus (21) folgt $\sqrt{g} = \varphi(u_1)$. Somit ist durch

(34) $$v_1 = \int \varphi(u_1)\, du_1, \quad v_2 = u_2$$

eine inhaltstreue Abbildung der Fläche (20) auf die Ebene hergestellt.

Für die Einheitskugel (25) wird (34) zu

(35) $$v_1 = \sin u_1, \quad v_2 = u_2.$$

Man erhält diese Abbildung, indem man die Kugelpunkte aus den Punkten der $x_3$-Achse durch Gerade, die zu dieser senkrecht sind, auf den der Kugel längs des Äquators umschriebenen Zylinder

(36) $$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

projiziert und den Zylinder dann in die Ebene abwickelt.

**E. Einhüllende zweiparametriger Ebenenscharen.** In II, § 5 sind wir durch Dualisierung des Begriffes Raumkurve zu einer wichtigen, besonders einfachen Flächenklasse, zu den Torsen gekommen. Im Vergleich dazu bringen die Ergebnisse einer Dualisierung des Flächenbegriffs nichts wesentlich Neues; wir beschränken uns daher auf eine ganz beiläufige Darstellung und überlassen die näheren rechnerischen Ausführungen, insbesondere die Aufstellung von Kriterien für die unten angegebenen Sonderfälle dem Leser.

Den Umstand, daß die Punkte einer Fläche durch zwei Parameter gegeben sind, pflegt man durch die Redeweise auszudrücken: Die Fläche besteht aus (oder: ist der Ort von) $\infty^2$ Punkten. Dual zur Fläche ist also eine Mannigfaltigkeit von $\infty^2$ Ebenen, d. h. eine zweiparametrige Ebenenschar; die Koeffizienten $\xi_i$ und $k$ der Gleichung einer allgemeinen Ebene der Schar

(37) $$x_i \xi_i = k$$

hängen von zwei willkürlichen Parametern $u_1, u_2$ ab. Dual zur Tangentenebene, die man als die Grenzlage einer Ebene durch drei Flächenpunkte erhält, ist dann ein Punkt der Einhüllenden (Grenzpunkt) als Grenzlage des Schnittpunktes dreier Ebenen der Schar. Sehen wir von Singularitäten ab, so ist bei allgemeiner Wahl der drei Ebenen der Grenzpunkt stets eindeutig bestimmt.[1]) Es ergeben sich dann drei Fälle:

1) Bei besonderer Wahl der drei Ebenen muß das nicht der Fall sein, genau so, wie man aus drei Punkten einer Fläche durch Grenzübergang nicht die Tangentenebene erhalten muß, wenn die Punkte speziell angenommen sind. Wählen wir sie z. B. so, daß sie stets auf der Schnittkurve der Fläche mit einer bestimmten Ebene $\varepsilon$ bleiben, so ergibt sich beim Grenzübergang, wie immer wir ihn ausführen, stets dieselbe Ebene $\varepsilon$, die durchaus nicht die Tangentenebene sein muß.

1. Der Grenzpunkt ist fest, d. h. seine Koordinaten hängen nicht mehr von den Parametern $u_1$, $u_2$ ab. Die Schar ist ein Ebenenbündel, d. h. sie besteht aus allen Ebenen durch einen Punkt.

2. Der Grenzpunkt hängt wesentlich nur von einem Parameter $t(u_1, u_2)$ ab (vgl. § 1), die Schar besteht dann aus allen Ebenen, die eine Kurve berühren, d. h. durch die Tangenten der Kurve hindurch gehen.

3. Der Grenzpunkt hängt wesentlich von den beiden Parametern $u_\alpha$ ab. Nur dann besteht die Schar tatsächlich aus allen Tangentenebenen einer Fläche.

Man beachte, daß die Ausartungen 1 und 2 der Ebenenscharen ganz analog den Ausartungen der Flächen zweiter Klasse sind, die ja nichts anderes als spezielle zweiparametrige Ebenenscharen darstellen.

Der Fall 2 enthält auch die Möglichkeit, daß die einhüllende Kurve ganz in der uneigentlichen Ebene des Raumes liegt. Ist diese Kurve insbesondere der absolute Kegelschnitt, so erhält man die zweiparametrige Schar (I, 6, 5) der isotropen Ebenen des komplexen Raumes.

**F. Orthogonale Trajektorien einer Kurvenschar.** Sei durch die integrable lineare Differentialgleichung

$$\varrho_\alpha du_\alpha = 0 \tag{38}$$

eine einparametrige Kurvenschar auf einer Fläche gegeben.[1]) Dann besteht die Schar

$$\sigma_\beta du_\beta = 0 \tag{39}$$

aus den orthogonalen Trajektorien von (38), wenn

$$g^{\alpha\beta}\varrho_\alpha\sigma_\beta = 0 \tag{40}$$

ist. Nun ist aber wegen (39)

$$\sigma_\beta = \lambda\varepsilon_{\beta\gamma}du_\gamma, \tag{41}$$

wo $\lambda$ ein Proportionalitätsfaktor ist, und aus (40) ergibt sich die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien in der Form

$$g^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma}\varrho_\alpha du_\gamma = 0. \tag{42}$$

Überschiebt man (4, 21) mit $\varepsilon_{\beta\varrho}$, so folgt wegen (4, 20)

$$g_{\gamma\varrho}\varepsilon^{\alpha\gamma} = g^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\varrho},$$

so daß man (42) auch in der Form

$$g_{\beta\gamma}\varepsilon^{\alpha\beta}\varrho_\alpha du_\gamma = 0 \tag{43}$$

schreiben kann.

1) Ist die Kurvenschar in der Form $\varphi(u_1, u_2) =$ konst. gegeben, so ist selbstverständlich $\varrho_\alpha = \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_\alpha}$ zu setzen.

# IV. Die zweite Grundform und die Krümmung einer Fläche.

## § 1. Der Satz von Meusnier. Die zweite Grundform. Gaußsche und mittlere Krümmung einer Fläche. Die Formeln von Weingarten.

Wir gehen jetzt an die nähere Untersuchung der *Gestalt* einer Fläche

$$x_i = x_i(u_1, u_2) \tag{1}$$

in der Umgebung eines Punktes $P$ mit den Koordinaten $u_1, u_2$. Dabei nehmen wir an, daß in dieser Umgebung $\varrho \geqq 2$ (vgl. III, § 1) sei, d. h. daß die Funktionen $x_i(u_1, u_2)$ mindestens zweimal stetig differenzierbar seien.

Es ist recht naheliegend, zunächst einmal die Krümmung von Kurven

$$u_\alpha = u_\alpha(s) \tag{2}$$

auf unserer Fläche zu untersuchen, die durch den Punkt $P$ hindurchgehen. Wir können dabei die Resultate von Abschnitt II verwenden. Der Kurvenparameter $s$ sei die Bogenlänge und die Funktionen $u_\alpha(s)$ seien mindestens zweimal stetig differenzierbar.

Wir gehen von der längs der Kurve (2) geltenden Identität

$$\frac{d x_i}{ds} \nu_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \frac{d u_\alpha}{ds} \nu_i = 0 \tag{3}$$

aus, die nichts anderes besagt als die Tatsache, daß der Tangentenvektor $\xi_i = \frac{d x_i}{ds}$ einer Flächenkurve (2) auf dem Normalenvektor $\nu_i$ der Fläche senkrecht steht. Durch Differentiation von (3) nach $s$ ergibt sich

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} \nu_i + \frac{d x_i}{ds} \frac{d\nu_i}{ds} = 0. \tag{4}$$

Nun ist aber nach (II, 2, 15)

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} = \frac{d\xi_i}{ds} = \frac{1}{\varrho} \eta_i, \tag{5}$$

wo $\frac{1}{\varrho} = \varkappa$ die Krümmung der Kurve (2) und $\eta_i$ ihren Hauptnormalenvektor bedeutet. Aus (4) und (5) folgt also

$$\frac{1}{\varrho} \eta_i \nu_i = \frac{1}{\varrho} \cos\alpha = \frac{d^2 x_i}{ds^2} \nu_i = -\frac{d x_i}{ds} \frac{d\nu_i}{ds}, \tag{6}$$

wo $\alpha$ den Winkel zwischen der Hauptnormalen von (2) und der Flächennormalen bedeutet. Wegen

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} \frac{du_\alpha}{ds} \frac{du_\beta}{ds} + \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \frac{d^2 u_\alpha}{ds^2}$$

und (3) können wir (6) in der Form

$$\frac{1}{\varrho} \cos\alpha = \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} \nu_i \frac{du_\alpha}{ds} \frac{du_\beta}{ds} = - \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \frac{\partial \nu_i}{\partial u_\beta} \frac{du_\alpha}{ds} \frac{du_\beta}{ds},$$

oder, wenn wir[1])

$$(7) \qquad \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} \nu_i = - \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \frac{\partial \nu_i}{\partial u_\beta} = b_{\alpha\beta}$$

setzen, wegen $ds^2 = g_{\alpha\beta}\, du_\alpha\, du_\beta$ auch in der Form

$$(8) \qquad \frac{1}{\varrho} \cos\alpha = \frac{b_{\alpha\beta}\, du_\alpha\, du_\beta}{g_{\alpha\beta}\, du_\alpha\, du_\beta}$$

schreiben. Wir erkennen daraus, daß *alle Flächenkurven* (2), *die durch den Punkt $P$ hindurchgehen und dort dieselbe Schmiegebene haben, in $P$ auch gleiche Krümmung haben* (es haben die $u_\alpha$, ebenso das Verhältnis $du_1 : du_2$ und der Winkel $\alpha$ gleiche Werte), und zwar stimmt diese Krümmung insbesondere mit der Krümmung der von der festen Schmiegebene auf der Fläche ausgeschnittenen ebenen Kurve überein. Daraus ergibt sich eine bedeutende Vereinfachung unserer Aufgabe, da wir uns *auf die Untersuchung der ebenen Flächenkurven durch $P$ beschränken können.*

Wir betrachten nun alle ebenen Schnitte der Fläche, die im Punkt $P$ eine feste Tangente gemeinsam haben. Für alle diese hat der Quotient auf der rechten Seite von (8) denselben Wert; wir setzen

$$(9) \qquad \frac{1}{R} = \frac{b_{\alpha\beta}\, du_\alpha\, du_\beta}{g_{\alpha\beta}\, du_\alpha\, du_\beta},$$

so daß

$$(10) \qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{\varrho} \cos\alpha,$$

oder

$$(11) \qquad \varrho = R \cos\alpha$$

wird. Schließen wir zunächst den Fall aus, daß $\frac{1}{R} = 0$ ist — wegen (9) tritt das nur für die Nullrichtungen der quadratischen Form $b_{\alpha\beta}\, du_\alpha\, du_\beta$ im Zähler ein — so ist wegen (10) auch $\frac{1}{\varrho} \neq 0$, d. h. keiner von den

---

1) Die Relation $\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} \nu_i = - \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \frac{\partial \nu_i}{\partial u_\beta}$ ergibt sich direkt durch Differentiation der Identität $\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \nu_i = 0$ nach $u_\beta$.

ebenen Schnitten der betrachteten Richtung hat in $P$ einen Wendepunkt. Die Krümmung aller anderen ebenen Schnitte wählen wir positiv, so daß die Hauptnormale in $P$ stets auf derselben Seite der (festen) Tangente liegen soll wie die Kurve selbst in der Umgebung von $P$ (diese Festsetzung ist eben nur dann möglich, wenn die Kurve in $P$ die Tangente nicht durchsetzt, also in $P$ keinen Wendepunkt hat). Unter dieser Annahme variiert der Winkel $\alpha$ nach (10) entweder zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ oder zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\pi$. Die Krümmung des zugehörigen *Normalschnittes*, d. h. des Schnittes der Fläche mit der Ebene durch die feste Tangente und die Flächennormale in $P$ stimmt dann höchstens bis auf das Vorzeichen mit dem Wert von $\frac{1}{R}$ überein. Für den Normalschnitt ist ja entweder $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$, je nachdem die Hauptnormale gleich oder entgegengesetzt gerichtet ist wie die Flächennormale; im ersten Fall ist $\frac{1}{R}$, im zweiten $-\frac{1}{R}$ die Krümmung des Normalschnittes. In beiden Fällen nennen wir $\frac{1}{R}$, also die mit einem bestimmten, von der Orientierung der Flächennormalen abhängigen Vorzeichen versehene Krümmung des Normalschnittes die zu der betrachteten Richtung gehörige *Normalkrümmung* der Fläche in $P$.[1]) Aus der Gleichung (11) entnehmen wir den *Satz von Meusnier*:

*Die Krümmungsmittelpunkte aller Flächenkurven, die durch einen Punkt $P$ gehen und in $P$ dieselbe Tangente haben, liegen auf einem Kreis vom Durchmesser $R$, der der gemeinsamen Normalebene der Kurven angehört und die Fläche in $P$ berührt.*

Diese einfache Beziehung zwischen den Krümmungen beliebiger ebener Schnitte und den zugehörigen Normalkrümmungen gestattet eine weitere Vereinfachung unserer Aufgabe, nämlich die *Beschränkung auf die Untersuchung des Büschels der Normalschnitte eines Flächenpunktes $P$.*

Vorher gehen wir aber noch an die Behandlung des Falles $\frac{1}{R} = 0$, der vor allem eine eingehendere Untersuchung der durch (7) definierten Größen ererfordert. Wir zeigen zunächst, daß diese $b_{\alpha\beta}$ einen symmetrischen Tensor zweiter Stufe bilden. In der Tat erhalten wir aus (7) bei Ausführung einer zulässigen Parametertransformation $u_\alpha = u_\alpha(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$

$$\bar{b}_{\alpha\beta} = -\frac{\partial x_i}{\partial \bar{u}_\alpha}\frac{\partial v_i}{\partial \bar{u}_\beta} = -\frac{\partial x_i}{\partial u_\gamma}\frac{\partial v_i}{\partial u_\delta}\frac{\partial u_\gamma}{\partial \bar{u}_\alpha}\frac{\partial u_\delta}{\partial \bar{u}_\beta} = b_{\gamma\delta}\frac{\partial u_\gamma}{\partial \bar{u}_\alpha}\frac{\partial u_\delta}{\partial \bar{u}_\beta}$$

1) Da es sich im folgenden nur um den Vergleich der Normalkrümmungen *eines* Flächenpunktes handelt, ist die oben getroffene Verfügung über das Vorzeichen der Krümmungen der ebenen Schnitte durchaus willkürlich, wir hätten ebensogut die entgegengesetzte Verfügung treffen können. Das wird besonders deutlich, wenn man sich an die ebenfalls ganz willkürliche Orientierung der Flächennormalen erinnert.

die Transformationsformeln eines kovarianten Tensors zweiter Stufe; die Symmetrie folgt unmittelbar aus den Gleichungen (7), denen wir auch die Relation

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_1}\frac{\partial v_i}{\partial u_2} = \frac{\partial x_i}{\partial u_2}\frac{\partial v_i}{\partial u_1} \tag{12}$$

entnehmen können. Wir nennen diesen Tensor den *Haupttensor* und die invariante quadratische Differentialform

$$-dx_i\,dv_i = b_{\alpha\beta}\,du_\alpha\,du_\beta \tag{13}$$

die *zweite Grundform*[1]). Sie besitzt in einem Flächenpunkt $P$ im allgemeinen zwei Nullrichtungen, die man als *Haupttangentenrichtungen* oder *Asymptotenrichtungen* des Punktes $P$ bezeichnet. Sie sind reell oder imaginär, je nachdem in $P$ die Diskriminante

$$b = b_{11}\,b_{22} - b_{12}^2 \tag{14}$$

negativ oder positiv ist, und fallen in eine einzige Richtung zusammen, wenn $b = 0$ ist. Die Integralkurven der Differentialgleichung $b_{\alpha\beta}\,du_\alpha\,du_\beta = 0$ heißen *Haupttangentenlinien* oder *Asymptotenlinien* der Fläche; sie existieren auf einer reellen Fläche nur, wenn $b \leqq 0$ ist (vgl. III, § 8 A). Längs der Asymptotenlinien ist nach (9) $\frac{1}{R} = 0$, d. h. aber, daß die Normalschnitte und damit alle ebenen Schnitte bis auf die mit der Tangentenebene in den Asymptotenrichtungen eines Punktes $P$ in $P$ Wendepunkte haben, weshalb man die Asymptotenlinien mitunter auch die *Wendelinien* der Fläche nennt. Eine weitere charakteristische Eigenschaft folgt daraus, daß nach (6) längs einer Asymptotenlinie identisch $\frac{1}{\varrho}\,\eta_i\nu_i = 0$ gilt, weshalb entweder $\frac{1}{\varrho} = 0$ oder $\eta_i\nu_i = 0$ ist. *Enthält also eine Fläche gerade Linien, so sind diese sicher Asymptotenlinien* (vgl. auch § 5), *während die Schmiegebenen aller nicht geradlinigen Asymptotenlinien stets zugleich Tangentenebenen der Fläche sind.*

Wir kehren nun zu der Untersuchung der Normalkrümmungen des Punktes $P$ zurück. Mit der Gleichung (9), die die Normalkrümmungen als Funktion der Flächenrichtungen des Punktes $P$ gibt und mit der Feststellung der Invarianz der zweiten Grundform haben wir den Anschluß an die Entwicklungen von III, § 5 gefunden; wir haben nur $b_{\alpha\beta}$ statt $a_{\alpha\beta}$ und $\frac{1}{R}$ statt $\lambda$ zu schreiben; außerdem wollen wir zunächst noch annehmen, daß in $P$ die Diskriminante (14) der zweiten Grundform nicht verschwindet, d. h. daß in $P$ zwei verschiedene, reelle oder imaginäre Asymptotenrichtungen vorhanden sind. Auf den Fall $b = 0$ werden wir in § 2 zurückkommen.

---

1) Die Komponenten $b_{11}$, $b_{12} = b_{21}$, $b_{22}$ des Haupttensors sind in der neueren Literatur meist mit $L, M, N$, in der älteren mit $D, D', D''$ bezeichnet.

Dann gilt: In dem Büschel der Normalschnitte durch einen festen Flächenpunkt $P$ gibt es im allgemeinen zwei *Hauptnormalschnitte*, deren Krümmungen $\frac{1}{R}$ extreme Werte haben. Diese *Hauptkrümmungen* $\frac{1}{'R}$ und $\frac{1}{''R}$ berechnen sich aus der quadratischen Gleichung

$$\frac{1}{R^2} - b_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} \frac{1}{R} + \frac{b}{g} = 0. \tag{15}$$

Die halbe Summe und das Produkt der beiden Hauptkrümmungen sind die beiden wichtigsten Differentialinvarianten der Flächentheorie; man nennt

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{'R} + \frac{1}{''R}\right) = \frac{1}{2} b_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} b^{\alpha}_{\alpha} \tag{16}$$

die *mittlere Krümmung* und

$$K = \frac{1}{'R\,''R} = \frac{b}{g} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\gamma\sigma} b_{\alpha\gamma} b_{\beta\sigma} \tag{17}$$

die *Gaußsche Krümmung* oder das *Krümmungsmaß*, auch kurz die *Krümmung* der Fläche im Punkt $P$.

Die Tangentenrichtungen der Hauptnormalschnitte heißen die *Hauptkrümmungsrichtungen* oder kurz *Hauptrichtungen* des Punktes $P$ und genügen der quadratischen Gleichung

$$\varepsilon^{\alpha\beta} b_{\alpha\gamma} g_{\beta\sigma} du_{\gamma} du_{\sigma} = 0, \tag{18}$$

die man auch in der Form

$$\begin{vmatrix} b_{\alpha 1} du_{\alpha} & g_{\beta 1} du_{\beta} \\ b_{\alpha 2} du_{\alpha} & g_{\beta 2} du_{\beta} \end{vmatrix} = 0 \tag{19}$$

oder

$$\begin{vmatrix} b_{11} & g_{11} & du_2^2 \\ b_{12} & g_{12} & -du_1 du_2 \\ b_{22} & g_{22} & du_1^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{20}$$

schreiben kann. *Die beiden Hauptrichtungen sind stets reell und stehen aufeinander senkrecht.* Sie sind dann und nur dann unbestimmt, wenn die erste und zweite Grundform zueinander proportional sind (vgl. unten § 2); die Gleichung (18) ist dann identisch erfüllt und umgekehrt.

Die Integralkurven der Gleichung (18) heißen die *Krümmungslinien* der Fläche; sie bilden ein orthogonales Kurvennetz auf der Fläche, das eine Reihe charakteristischer Eigenschaften besitzt, auf die wir im folgenden noch ausführlich zurückkommen werden.

Zur Behandlung der beiden Sonderfälle proportionaler Grundformen und verschwindender Diskriminante $b$ der zweiten Grundform benötigen wir noch eine wichtige *Formel für die Ableitungen des Normalenvektors* der Fläche,

die wir mit Hilfe des Haupttensors leicht aufstellen können. Der Normalenvektor genügt der Identität

$$\nu_i \nu_i = 1. \tag{21}$$

Daraus folgt durch Differentiation

$$\frac{\partial \nu_i}{\partial u_\alpha} \nu_i = 0, \tag{22}$$

d. h. die beiden Ableitungen des Normalenvektors sind senkrecht zum Normalenvektor, so daß wir sie als Flächenvektoren ansehen können. Sie müssen sich also linear durch die beiden Vektoren $\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}$ ausdrücken lassen; wir setzen

$$\frac{\partial \nu_i}{\partial u_\beta} = p_\beta^{\cdot\lambda} \frac{\partial x_i}{\partial u_\lambda} \tag{23}$$

und erhalten durch Überschiebung mit $\frac{\partial x_i}{\partial u_\varkappa}$

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_\varkappa} \frac{\partial \nu_i}{\partial u_\beta} = p_\beta^{\cdot\lambda} \frac{\partial x_i}{\partial u_\varkappa} \frac{\partial x_i}{\partial u_\lambda} = p_\beta^{\cdot\lambda} g_{\varkappa\lambda}, \tag{24}$$

oder wegen (7)

$$b_{\beta\varkappa} = - p_\beta^{\cdot\lambda} g_{\varkappa\lambda} \tag{25}$$

und daraus durch Überschiebung mit $g^{\alpha\varkappa}$ wegen $g^{\alpha\varkappa} g_{\varkappa\lambda} = \delta_\lambda^\alpha$

$$p_\beta^{\cdot\alpha} = - g^{\alpha\varkappa} b_{\beta\varkappa} = - b_\beta^\alpha \tag{26}$$

(auch hier ist wie beim Maßtensor wegen der Symmetrie $b_\beta^{\cdot\alpha} = b^\alpha_{\cdot\beta}$, so daß wir kurz $b_\beta^\alpha$ schreiben können). Somit lauten (23)

$$\frac{\partial \nu_i}{\partial u_\beta} = - b_\beta^\alpha \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}. \tag{27}$$

Die darin zusammengefaßten sechs Gleichungen heißen die *Weingartenschen Formeln*; sie bilden die erste Gruppe der *Ableitungsgleichungen der Flächentheorie*, die das Analogon zu den FRENETschen Formeln der Kurventheorie und von gleicher fundamentaler Bedeutung wie diese sind.

Als erstes Anwendungsbeispiel bestimmen wir die Flächen, auf denen die zweite Grundform überall identisch verschwindet. Aus $b_{\alpha\beta} = 0$ folgt zunächst wegen $b_\alpha^\beta = b_{\alpha\gamma} g^{\beta\gamma}$ auch $b_\alpha^\beta = 0$, und somit aus (27) sofort $\frac{\partial \nu_i}{\partial u_\alpha} = 0$, d. h. aber, daß der Normalenvektor konstant und *die Fläche somit eine Ebene ist.*

## § 2. Die Eulersche Formel und die Indikatrix von Dupin. Nabelpunkte. Die Flächen verschwindender Krümmung.

Die Gleichung (III, 5, 28) lautet hier

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{'R}\cos^2\vartheta_1 + \frac{1}{''R}\sin^2\vartheta_1 \tag{1}$$

und heißt *Eulersche Gleichung*. Dabei ist nach wie vor $b \neq 0$ angenommen. Sie stimmt im wesentlichen mit (1, 10) überein und *gibt die Abhängigkeit der Normalkrümmungen im Punkt $P$ von den Hauptkrümmungen und dem Winkel $\vartheta_1$ der Schnittebene mit der ersten Hauptrichtung an.* Eine anschauliche Deutung liefert uns die Indikatrix der zweiten Grundform, die man als *Dupinsche Indikatrix* zu bezeichnen pflegt. Trägt man vom Punkt $P$ aus auf dem Büschel der Flächentangenten jeweils den zugehörigen Wert von $\sqrt{|R|}$ auf, so liegen die Endpunkte dieser Strecken auf der Dupinschen Indikatrix des Punktes $P$. Es sind wieder folgende Fälle zu unterscheiden:

I. $b > 0$. Es haben $'R$ und $''R$ und damit auch $R$ dasselbe Vorzeichen. Die Indikatrix ist eine Ellipse und die Fläche liegt in der Umgebung des Punktes $P$ ganz auf einer Seite der Tangentenebene von $P$, der Punkt $P$ selbst heißt *elliptischer Punkt* der Fläche. Die zweite Grundform ist definit und zwar positiv oder negativ, je nachdem die Flächennormale in $P$ auf derselben oder entgegengesetzten Seite der Tangentenebene liegt wie die Fläche. Die Schnittkurve der Fläche mit der Tangentenebene hat in $P$ einen isolierten Punkt.

II. $b < 0$. $'R$ und $''R$ haben entgegengesetztes Vorzeichen. Die Hauptkrümmungen $\frac{1}{R}$ sind teils positiv, teils negativ und die Tangentenebene des Punktes $P$ durchsetzt die Fläche in einer reellen Kurve, die in $P$ einen Doppelpunkt hat. Die Dupinsche Indikatrix besteht aus einem Paar konjugierter Hyperbeln; der Punkt $P$ heißt demgemäß *hyperbolischer* Punkt der Fläche.

Wir zeigen noch, daß die Schnittkurve der Fläche mit einer zur Tangentenebene eines Flächenpunktes $P$ parallelen Ebene, deren Abstand von der Tangentenebene klein ist, in erster Annäherung ein zur Dupinschen Indikatrix des Punktes $P$ homothetischer[1]) Kegelschnitt ist. Wir verwenden die sogenannte *kanonische Darstellung* der Fläche in der Umgebung von $P$, die sich aus der in III, § 1 erwähnten Darstellung

$$x_\alpha = u_\alpha, \quad x_3 = f(u_1, u_2) = f(x_1, x_2), \tag{2}$$

1) Homothetisch heißt bei Mittelpunktskegelschnitten ähnlich und ähnlich gelegen, also gleicher Mittelpunkt, gleiche Richtungen und proportionale Längen der Hauptachsen.

bei der die Parameterlinien durch die Ebenen $x_\alpha = $ konst. ausgeschnitten werden, durch besondere Wahl des Koordinatensystems im $R_3$ ergibt. Die Funktion $f(u_1, u_2)$ setzen wir als zweimal differenzierbar voraus, die Ableitungen bezeichnen wir durch angehängte Indizes $\left(\frac{\partial f}{\partial u_\alpha} = f_\alpha\right)$. Für die Darstellung (2) gilt dann

(3) $$g_{11} = 1 + f_1^2, \quad g_{12} = f_1 f_2, \quad g_{22} = 1 + f_2^2,$$

(4) $$g = 1 + f_1^2 + f_2^2,$$

(5) $$\nu_i = \frac{1}{\sqrt{g}} (-f_1 \delta_{1i} - f_2 \delta_{2i} + \delta_{3i})$$

und

(6) $$b_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}} f_{\alpha\beta}.$$

Wir legen nun das Koordinatensystem so, daß der Punkt $P$ mit dem Ursprung, die Tangentenebene mit der $x_1 x_2$-Ebene und die Hauptkrümmungsrichtungen von $P$ bzw. mit der $x_1$- und $x_2$-Achse zusammenfallen. Kennzeichnen wir die auf den Punkt $P$ bezüglichen Größen durch einen oberen Index Null, so wird wegen $f^0 = f_1^0 = f_2^0 = f_{12}^0 = 0$

(7) $$g_{11}^0 = 1, \quad g_{12}^0 = 0, \quad g_{22}^0 = 1,$$

(8) $$g^0 = 1,$$

(9) $$\nu_i^0 = \delta_{3i},$$

(10) $$b_{11}^0 = f_{11}^0, \quad b_{12}^0 = 0, \quad b_{22}^0 = f_{22}^0,$$

oder wegen (III, 5, 27)

(11) $$b_{11}^0 = \frac{1}{{}'R^0}, \quad b_{12}^0 = 0, \quad b_{22}^0 = \frac{1}{{}''R^0}.$$

Nach dem Satz von MAC LAURIN ist allgemein

(12) $$f(x_1, x_2) = f^0 + f_\alpha^0 x_\alpha + \tfrac{1}{2} f_{\alpha\beta}(\vartheta x_1, \vartheta x_2) x_\alpha x_\beta, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

In der Umgebung des Nullpunktes gilt also näherungsweise

(13) $$x_3 \doteq f^0 + f_\alpha^0 x_\alpha + \tfrac{1}{2} f_{\alpha\beta}^0 x_\alpha x_\beta$$

und somit in unserem besonderen Koordinatensystem

(14) $$x_3 \doteq \frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{{}'R^0} + \frac{x_2^2}{{}''R^0}\right).$$

Schneiden wir die Fläche mit der zur $x_1 x_2$-Ebene parallelen Ebene $x_3 = \frac{1}{2}\varepsilon$, so folgt

(15) $$\frac{x_1^2}{{}'R^0} + \frac{x_2^2}{{}''R^0} \doteq \varepsilon, \quad x_3 = \frac{1}{2}\varepsilon,$$

also jedenfalls die Gleichung eines Kegelschnittes.

Ist $P$ ein elliptischer Flächenpunkt, also $'R^0\,''R^0 > 0$, so ist (15) eine Ellipse oder ein nullteiliger Kegelschnitt, je nachdem $'R^0\varepsilon > 0$ oder $'R^0\varepsilon < 0$ gilt. Ist dagegen $P$ ein hyperbolischer Punkt, so ist (15) wegen $'R^0\,''R^0 < 0$ jedenfalls eine Hyperbel, die bei einer Änderung des Vorzeichens von $\varepsilon$ in die konjugierte Hyperbel übergeht. In allen Fällen ist (15) — bis auf die Verschiebung in der Richtung der Flächennormalen von $P$ — homothetisch zur DUPINschen Indikatrix

$$\frac{x_1^2}{'R^0} + \frac{x_2^2}{''R^0} = \pm 1 \tag{16}$$

des Punktes $P$. Nach III, § 5 ist das Vorzeichen rechts so zu wählen, daß der Kegelschnitt nicht nullteilig wird, also bei einem elliptischen Flächenpunkt übereinstimmend mit dem Vorzeichen von $'R^0$ und $''R^0$, während bei einem hyperbolischen Punkt beide Vorzeichen gleichberechtigt sind, also die beiden konjugierten Hyperbeln zur Indikatrix zu rechnen sind.

Die Asymptotenrichtungen der DUPINschen Indikatrix stimmen mit den Haupttangenten- oder Asymptotenrichtungen des Flächenpunktes überein; ihre Winkelsymmetralen sind die Hauptkrümmungsrichtungen des Punktes.

Wir gehen nun an die Untersuchung des Falles $b = 0$. Aus (1, 17) folgt, daß in allen Punkten, wo die Asymptotenrichtungen zusammenfallen, also $b = 0$ ist, die GAUSSsche Krümmung $K$ verschwindet. Derartige Flächenpunkte nennt man *parabolische Punkte*. Die DUPINsche Indikatrix ist aber nicht etwa eine Parabel, sondern ein Paar paralleler Geraden. Nach (1, 15) oder (1, 17) ist ja in einem parabolischen Punkt $P$ stets eine der beiden Hauptkrümmungen, etwa $\frac{1}{''R} = 0$, und die EULERsche Gleichung (1) wird zu

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{'R}\cos^2\vartheta_1 \tag{17}$$

oder

$$'R = R\cos^2\vartheta_1. \tag{18}$$

Deutet man $r = \sqrt{|R|}$ und $\vartheta_1$ als Polarkoordinaten in der Tangentenebene, so wird (18) die Gleichung zweier Geraden, die im Abstand $\sqrt{|'R|}$ parallel zu der Richtung der verschwindenden Hauptkrümmung laufen. Dasselbe ergibt sich auch aus der kanonischen Darstellung in der Umgebung eines parabolischen Punktes; unter entsprechenden Annahmen wird (14) zu

$$x_3 \doteq \frac{1}{2}\frac{x_1^2}{'R} \tag{19}$$

und für den Schnitt mit einer Ebene $x_3 = \frac{1}{2}\varepsilon$ erhält man

$$\frac{x_1^2}{'R} = \varepsilon, \tag{20}$$

also in der Tat ein Paar paralleler Geraden. Die Schnittkurve der Tangentenebene in $P$ mit der Fläche, hat in $P$ im allgemeinen eine Spitze. Betrachten wir als Beispiel die Fläche[1])

$$x_3 = -x_1^2 + x_2^3. \tag{21}$$

Mit Hilfe der Formeln (3) bis (6) rechnet man leicht nach, daß diese Fläche in allen Punkten der Parabel $x_2 = 0$, $x_3 = -x_1^2$ parabolische Punkte hat, also insbesondere auch im Ursprung. Die Tangentenebene im Ursprung ist $x_3 = 0$ und ihr Schnitt mit der Fläche die semikubische Parabel $x_1^2 = x_2^3$, die im Ursprung eine Spitze mit der Tangente in der $x_1$-Achse hat.

Sind in einem parabolischen Punkt alle $b_{\alpha\beta} = 0$, so ist offenbar auch $\frac{1}{'R} = 0$ und damit verschwinden alle Normalkrümmungen in $P$. Die quadratische Gleichung (1, 18) ist in $P$ identisch erfüllt. Solche Punkte nennen wir *parabolische Nabelpunkte.* Ein Beispiel ist der Punkt (0, 0, 0) der Fläche

$$x_3 = x_1^3 + x_2^3. \tag{22}$$

Verschwinden in $P$ nicht alle $b_{\alpha\beta}$, so ist entweder $b_{11} \neq 0$, $b_{12} = b_{22} = 0$ oder $b_{11} = b_{12} = 0$, $b_{22} \neq 0$ oder schließlich $b_{11} \neq 0$, $b_{12} \neq 0$, $b_{22} \neq 0$. Die zweite Grundform läßt sich dann in der Form

$$b_{\alpha\beta}\, du_\alpha\, du_\beta = b_{11} du_1^2 \tag{23}$$

bzw.

$$b_{\alpha\beta}\, du_\alpha\, du_\beta = b_{22} du_2^2 \tag{24}$$

oder

$$b_{\alpha\beta} du_\alpha du_\beta = \frac{1}{b_{11}} (b_{1\alpha} du_\alpha)^2 = \frac{1}{b_{22}} (b_{2\alpha} du_\alpha)^2 \tag{25}$$

schreiben. Aus (1, 19) oder (1, 20) erkennt man, daß in allen drei Fällen *die Asymptotenrichtung zugleich eine Hauptkrümmungsrichtung* ist, und zwar natürlich jene, deren zugehörige Hauptkrümmung verschwindet.

Gibt es auf einer Fläche, deren Ortsvektor eine zweimal stetig differenzierbare Funktion der Parameter ist, sowohl elliptische als auch hyperbolische Punkte, so gibt es auf der Fläche im allgemeinen eine Kurve von parabolischen Punkten, die das Gebiet der elliptischen von dem der hyperbolischen Punkte trennt. Verbinden wir nämlich einen elliptischen und einen hyperbolischen Punkt durch eine stetige Flächenkurve $C$, so ist die Gaussische Krümmung $K$

---

1) Sie entsteht dadurch, daß man die Parabel $x_3 = -x_1^2$ stets parallel längs der kubischen Parabel $x_3 = x_2^3$ verschiebt. Derartige Flächen heißen *Schiebflächen*; ihre Gleichung läßt sich stets in die Form $x_i(u_1, u_2) = y_i(u_1) + z_i(u_2)$ bringen. Auch die folgende Fläche (22) ist eine Schiebfläche.

längs $C$ eine stetige Funktion des Kurvenparameters, die im ersten Punkt positiv, im zweiten negativ ist, dazwischen also mindestens einmal verschwindet, so daß $C$ mindestens einen parabolischen Punkt enthält. Vgl. hierzu die beiden obigen Beispiele.

Wir zeigen noch, daß *die einzigen Flächen, auf denen die Gaußsche Krümmung $K$ überall verschwindet, die Torsen sind.* Schließen wir die Ebenen, auf denen die zweite Grundform überall identisch verschwindet (§ 1, Schluß), aus, so haben die Flächen mit $K = 0$ jedenfalls die charakteristische Eigenschaft, nur *eine einzige Schar von Asymptotenlinien* zu besitzen. Die Differentialgleichung derselben wird wegen (25)

$$b_{1\alpha}\, du_\alpha = 0 \tag{26}$$

oder

$$du_1 : du_2 = -b_{12} : b_{11}.$$

Aus den Weingartenschen Formeln (1, 27) folgt, daß längs einer Asymptotenlinie

$$\begin{aligned} d\nu_i = \frac{\partial \nu_i}{\partial u_\alpha} du_\alpha &= -b_\alpha^\beta \frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} du_\alpha = -b_{\alpha\gamma} g^{\beta\gamma} \frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} du_\alpha \\ &= \sigma(-b_{1\gamma} b_{12} + b_{2\gamma} b_{11}) g^{\beta\gamma} \frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} \\ &= \sigma(-b_{11} b_{12} + b_{21} b_{11}) g^{\beta 1} \frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} + \sigma(-b_{12}^2 + b_{22} b_{11}) g^{\beta 2} \frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} = 0 \end{aligned}$$

gilt. Dabei ist $\sigma$ ein von Null verschiedener Proportionalitätsfaktor. Somit ist der Normalenvektor längs der ganzen Asymptotenlinie fest. Aus der längs jeder Flächenkurve giltigen Identität

$$\frac{dx_i}{ds} \nu_i = 0$$

folgt wegen $\nu_i =$ konst. durch Integration

$$x_i \nu_i = c, \tag{27}$$

wobei $c$ ebenso wie $\nu_i$ und somit auch die ganze Tangentenebene längs der betrachteten Asymptotenlinie fest ist. Somit besitzt die Fläche nur $\infty^1$ Tangentenebenen und ist also eine Torse. Als Nebenresultat folgt daraus noch, daß *die Asymptotenlinien einer Torse Gerade (die Erzeugenden) sind und mit der einen Schar der Krümmungslinien zusammenfallen.*

Der zweite Sonderfall, den wir noch zu erledigen haben, ist der Fall, wo im Punkt $P$ die beiden Grundformen proportional sind, so daß in $P$

$$b_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta} \tag{28}$$

gilt. Derartige Punkte heißen *Nabelpunkte* oder *Kreispunkte.* Aus (1, 20) erkennt man, daß die Hauptkrümmungsrichtungen in $P$ unbestimmt, aus (1, 9), daß alle Normalkrümmungen und daher insbesondere auch die Haupt-

krümmungen des Punktes $P$ gleich sind, da die rechte Seite von $du_1 : du_2$, also von der Richtung unabhängig wird. Die DUPINsche Indikatrix ist ein Kreis, wenn nicht $\lambda = 0$, das heißt $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$ ist, was wieder auf den parabolischen Nabelpunkt führt.

Gilt (28) identisch in den $u_\alpha$, so sind *alle Punkte der Fläche Nabelpunkte.* Unter der Voraussetzung, daß der Normalenvektor $\nu_i$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion der $u_\alpha$ ist — was für $\varrho \geqq 3$ sicher zutrifft —, läßt sich zeigen, daß *alle derartigen Flächen entweder Kugeln oder Ebenen sind.* Verschwinden alle $b_{\alpha\beta}$ identisch, so ist die Fläche eine Ebene (vgl. § 1, Schluß); die Ebenen sind also die einzigen Flächen mit lauter parabolischen Nabelpunkten. Sind nicht alle $b_{\alpha\beta}$ auf der ganzen Fläche gleich Null, so folgt wegen (28) aus den WEINGARTENschen Gleichungen (1, 27)

$$\frac{\partial \nu_i}{\partial u_\alpha} = -\lambda \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \tag{29}$$

und daraus durch Differentiation

$$\frac{\partial^2 \nu_i}{\partial u_\beta \, \partial u_\alpha} = -\frac{\partial \lambda}{\partial u_\beta} \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} - \lambda \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_\beta \, \partial u_\alpha}. \tag{30}$$

Vertauscht man hier $\alpha$ und $\beta$ und subtrahiert die sich so ergebende Gleichung von (30), so ergibt sich, da nach unseren Voraussetzungen die zweiten partiellen Ableitungen von der Reihenfolge der Differentiationen unabhängig sind, als einzige nicht triviale Relation

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u_1} \frac{\partial x_i}{\partial u_2} - \frac{\partial \lambda}{\partial u_2} \frac{\partial x_i}{\partial u_1} = 0, \tag{31}$$

woraus wegen der Unabhängigkeit der beiden Vektoren $\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}$ folgt, daß $\frac{\partial \lambda}{\partial u_\alpha} = 0$, d. h. $\lambda$ konstant ist. (29) gibt integriert

$$\nu_i = -\lambda x_i + C_i, \tag{32}$$

oder, wenn wir $\lambda = -\frac{1}{R}$ und $-RC_i = a_i$ setzen, wegen $\nu_i \nu_i = 1$

$$(x_i - a_i)(x_i - a_i) = R^2, \tag{33}$$

also die Gleichung einer Kugel vom Radius $R$ mit dem Mittelpunkt $a_i$.

## § 3. Die Krümmungslinien einer Fläche und die Zentrafläche.

Die Definition der Krümmungslinien durch die Gleichung (1, 18) läßt sich in Worten etwa folgendermaßen formulieren: *Das Netz der Krümmungslinien ist zugleich orthogonal und konjugiert* (vgl. III, § 5). Dabei heißt ein Kurvennetz *konjugiert,* wenn die Richtungen der beiden Netzkurven in einem Flächenpunkt $P$ zu den Asymptotenrichtungen in $P$ konjugiert sind, d. h. also, wenn diese

vier Richtungen harmonisch sind.[1]) Im wesentlichen gleichbedeutend damit ist die Definition der Krümmungslinien als jene Kurven, deren Richtungen in jedem Punkt mit den Achsenrichtungen der DUPINschen Indikatrix zusammenfallen.

Die Krümmungslinien besitzen noch zwei weitere charakteristische Eigenschaften, die also auch als Definitionen verwendet werden können. Wir betrachten die Schar der $\infty^2$ Flächennormalen, d. h. die Gesamtheit aller Geraden, die in ihren Schnittpunkten mit der Fläche auf derselben senkrecht stehen. Jede Schar von $\infty^2$ Geraden heißt *Geradenkongruenz*, die in Rede stehende insbesondere *Normalenkongruenz*. Ist wieder

$$(1) \qquad x_i = x_i(u_1, u_2)$$

eine Parameterdarstellung der Fläche und $\nu_i(u_1, u_2)$ der Normalenvektor, so ist

$$(2) \qquad z_i = x_i + \lambda \nu_i$$

eine Darstellung der Normalenkongruenz, wobei der für die Kongruenz selbst unwesentliche Parameter $\lambda$ die Entfernung des Punktes mit dem Ortsvektor $z_i$ von dem auf derselben Geraden der Kongruenz liegenden Flächenpunkt mit dem Ortsvektor $x_i(u_1, u_2)$ angibt.[2])

Die Geraden der Normalenkongruenz, die die Fläche (1) in den Punkten einer Kurve $u_\alpha = u_\alpha(t)$ treffen, erfüllen eine geradlinige Fläche *(Regelfläche)*, für die sich aus (2) die Parameterdarstellung

$$(3) \qquad z_i(t, \lambda) = x_i\big(u_1(t), u_2(t)\big) + \lambda \nu_i\big(u_1(t), u_2(t)\big)$$

ergibt und die wir als *Normalenfläche* der Kurve $u_\alpha(t)$ bezeichnen. Dann gilt:

*Die Krümmungslinien sind die einzigen Flächenkurven, deren Normalenflächen Torsen sind.*

Wir zeigen zunächst, daß $u_\alpha(t)$ eine Krümmungslinie ist, wenn (3) eine Torse ist; nach § 2 hat dann (3) in allen Punkten einer beliebigen Erzeugenden $t =$ konst. dieselbe Tangentenebene, also müssen insbesondere die beiden Vektoren $\frac{d x_i}{dt}$ und $\frac{d x_i}{dt} + \frac{d \nu_i}{dt}$, die Tangentenvektoren der Fläche (3) in den Punkten $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ der Erzeugenden $t =$ konst. sind, in einer Ebene mit dieser Erzeugenden liegen oder, da sie beide auf dieser senkrecht stehen, proportional, d. h. linear abhängig sein. Dasselbe gilt dann natürlich auch für die Vektoren $d x_i$ und $d \nu_i$. Aus

---

1) Vgl. hierzu und auch über die Bedingungen dafür, daß die Krümmungslinien Parameterkurven sind, § 5.

2) Vgl. I, § 7 B.

$$A\,dx_i + B\,dv_i = A\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}du_\alpha + B\frac{\partial v_i}{\partial u_\beta}du_\beta = 0 \tag{4}$$

folgt aber durch Überschiebung mit $\frac{\partial x_i}{\partial u_\gamma}$

$$A\,g_{\gamma\alpha}\,du_\alpha - B\,b_{\gamma\beta}\,du_\beta = 0 \tag{5}$$

und durch Elimination von $A$ und $B$ aus diesen beiden ($\gamma = 1, 2$) Gleichungen erhält man sofort die Differentialgleichung der Krümmungslinien in der Form (1, 19).

Es bleibt noch nachzuweisen, daß auch die Umkehrung gilt, d. h. daß die Normalenfläche jeder Krümmungslinie eine Torse ist.

Aus (1, 19) folgt, daß längs einer Krümmungslinie

$$\frac{b_{\alpha 1}\,du_\alpha}{g_{\alpha 1}\,du_\alpha} = \frac{b_{\alpha 2}\,du_\alpha}{g_{\alpha 2}\,du_\alpha} = \mu \tag{6}$$

unabhängig von den $du_\alpha$ ist; erweitert man den ersten Bruch mit $du_1$, den zweiten mit $du_2$ und addiert die Zähler und die Nenner, wodurch sich der Wert von $\mu$ nicht ändert, so folgt aus (1, 9)

$$\mu = \frac{1}{R},$$

so daß man statt (6) auch

$$(g_{\alpha\beta} - R b_{\alpha\beta})\,du_\alpha = 0$$

oder wegen
$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial u_\beta}, \quad b_{\alpha\beta} = -\frac{\partial v_i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial u_\beta}$$

auch

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_\beta}(dx_i + R\,dv_i) = 0 \tag{7}$$

schreiben kann. Da die Matrix $\left\| \frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} \right\|$ den Rang 2 hat, kann (7) nur erfüllt sein, wenn

$$dx_i + R\,dv_i = 0 \tag{8}$$

ist. Da sich alle Tangentenvektoren der Normalenfläche (3) in den Punkten einer Erzeugenden $t =$ konst. aus den Vektoren $dx_i + \lambda dv_i$ und $v_i$ linear zusammensetzen, folgt aus (8), daß die Normalenfläche einer Krümmungslinie längs ihrer Erzeugenden feste Tangentenebenen hat, also eine Torse ist, w. z. b. w.

Die längs einer Krümmungslinie identisch geltende Relation (8) wird gewöhnlich als *Formel von Rodrigues* bezeichnet. Ausführlicher geschrieben lautet sie

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} + R\frac{\partial v_i}{\partial u_\alpha}\right)du_\alpha = 0. \tag{9}$$

Diese Relationen lassen sich als ein System von drei homogenen linearen Gleichungen für die Krümmungsrichtungen $du_\alpha$ ansehen; sie besitzen nur dann eine von der Nullösung verschiedene Lösung, wenn sämtliche Determinanten der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} + R \frac{\partial v_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} + R \frac{\partial v_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} + R \frac{\partial v_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} + R \frac{\partial v_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} + R \frac{\partial v_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} + R \frac{\partial v_3}{\partial u_2} \end{matrix} \right\| \tag{10}$$

verschwinden. Erweitern wir diese Matrix durch Hinzufügung einer dritten Zeile, die von den beiden ersten linear unabhängig, sonst aber ganz beliebig ist, zu einer quadratischen Matrix, so muß die Determinante dieser Matrix verschwinden. Ist also $a_i$ ein willkürlicher Vektor, für den nur $a_i v_i \neq 0$ ist, so ist

$$\varepsilon_{ikl} \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_1} + R \frac{\partial v_i}{\partial u_1}\right) \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_2} + R \frac{\partial v_k}{\partial u_2}\right) a_l = 0 \tag{11}$$

nichts anderes als eine neue Form der Gleichung (1, 15) zur Bestimmung der Hauptkrümmungen. Aus ihr folgen zwei weitere Ausdrücke für Krümmung und mittlere Krümmung, nämlich

$$K = \frac{\varepsilon_{ikl} \frac{\partial v_i}{\partial u_1} \frac{\partial v_k}{\partial u_2} a_l}{\varepsilon_{ikl} \frac{\partial x_i}{\partial u_1} \frac{\partial x_k}{\partial u_2} a_l}, \tag{12}$$

$$H = -\frac{\varepsilon_{ikl} \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_1} \frac{\partial v_k}{\partial u_2} + \frac{\partial v_i}{\partial u_1} \frac{\partial x_k}{\partial u_2}\right) a_l}{2\, \varepsilon_{ikl} \frac{\partial x_i}{\partial u_1} \frac{\partial x_k}{\partial u_2} a_l}. \tag{13}$$

Durch eine ganz ähnliche Überlegung gewinnt man aus (9) durch Elimination von $R$ eine neue Form der Differentialgleichung (1, 18) der Krümmungslinien:

$$\varepsilon_{ikl} \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \frac{\partial v_k}{\partial u_\beta} a_l du_\alpha du_\beta = 0, \tag{14}$$

wo wieder $a_i$ ein willkürlicher Vektor ist, für den nur $a_i v_i \neq 0$ ist.

Auf Grund der zuletzt gegebenen Definition lassen sich die Krümmungslinien auf *Drehflächen* leicht bestimmen: sie sind offenbar die Meridiane und Breitenkreise, da die Normalenflächen der ersteren Ebenen, die der letzteren Kegel, also beide Sonderfälle von Torsen sind. Daß die Meridiane und Breitenkreise einer Drehfläche ein orthogonales Netz bilden, ist ebenfalls unmittelbar einzusehen.

Die Gratlinien der Normalentorsen, wie wir kurz sagen wollen, ergeben sich aus (3), wenn man $\lambda = R$ ($R$ ist Funktion des Parameters $t$) setzt, sie haben also die Parameterdarstellung

$$z_i = x_i + R\nu_i. \tag{15}$$

Zu jeder Schar von Krümmungslinien erhält man eine Schar von Gratlinien der zugehörigen Normalentorsen; diese beiden Scharen von Gratlinien erfüllen im allgemeinen zwei Flächen, die man aber bloß als zwei „Mäntel" einer einzigen Fläche, der *Zentrafläche* oder *Evolutenfläche* der ursprünglichen Fläche (1) ansieht.

Bevor wir aber an eine nähere Untersuchung der Zentrafläche gehen, wollen wir noch eine weitere Definition der Krümmungslinien kennen lernen. Wir betrachten die Schar der $\infty^1$ Kugeln, die unsere Fläche (1) in einem Punkt $P(u_1, u_2)$ berühren, d. h. in $P$ dieselbe Tangentenebene wie (1) haben. Die Mittelpunkte dieser Kugeln liegen dann offenbar auf der Flächennormalen durch $P$. Wir fragen uns, ob es in dieser Schar Kugeln gibt, die von Flächenkurven, die *in bestimmter Richtung* durch $P$ gehen, in mindestens zweiter Ordnung berührt werden. Man spricht dann von *stationärer Berührung* (in der bestimmten Richtung). Ist

$$z_i = x_i + R\nu_i \tag{16}$$

der Ortsvektor des Mittelpunktes und $R$ der Radius einer Kugel, die (1) in $P$ berührt, so ist

$$x_i - z_i = -R\nu_i \quad \text{oder} \quad \Phi = (x_i - z_i)(x_i - z_i) - R^2 = 0 \tag{16'}$$

($\nu_i \nu_i = 1$) eine Darstellung dieser Kugel mit festen $z_i$ und $R$, für die also

$$dx_i + R\,d\nu_i = 0 \tag{17}$$

in allen Punkten (der Kugel) und für jede Richtung gilt. Auf der Fläche (1) ist (17) die Formel von Rodrigues (8) und gilt also nur für die Hauptrichtungen, wenn $R$ der zugehörige Hauptkrümmungsradius ist; stationäre Berührung findet also in den beiden Hauptkrümmungsrichtungen und nur in diesen statt.[1]) Die Radien der beiden stationär berührenden Kugeln, der *Hauptkugeln* des Punktes $P$, sind gleich den zugehörigen Hauptkrümmungsradien. Damit haben wir die dritte charakteristische Eigenschaft der Krümmungslinien:

*Die Krümmungslinien einer Fläche geben in jedem Punkt die Richtungen der stationären Berührung der beiden Hauptkugeln an.*

---

1) Bezeichnen wir für den Augenblick die Flächennormale mit $\varrho_i$ ($\nu_i$ ist die der Kugel), so folgt aus (17) $d\varrho_i = d\nu_i$ für die Hauptkrümmungsrichtungen, so daß für diese nicht nur $d\Phi = \pi\nu_i\,dx_i = 0$, sondern auch $d^2\Phi = d(\pi\nu_i\,dx_i) = 0$ ist.

Die Punkte

$$(18)\qquad {}'z_i = x_i + {}'R\,\nu_i \qquad {}''z_i = x_i + {}''R\,\nu_i$$

heißen *Krümmungsmittelpunkte* von $P$, sie liegen auf der Zentrafläche, die ihrerseits *als Ort der Krümmungsmittelpunkte definiert werden kann.*

Es sei nun die Fläche (1) auf ihre Krümmungslinien als Parameterkurven bezogen; wir sprechen dann kurz von *Krümmungsparametern.* Das gibt nach III, § 5 unmittelbar $g_{12} = b_{12} = 0$; dabei sagt $g_{12} = 0$ aus, daß die Parameterkurven orthogonal, $b_{12} = 0$, daß sie konjugiert sind, so daß die beiden Bedingungen notwendig und hinreichend für Krümmungsparameter sind. Die Bezeichnungen seien so gewählt, daß $'R$ zur 1-Richtung, $''R$ zur 2-Richtung gehört. Der Normalenvektor des ersten Mantels der Zentrafläche hat dann die Richtung

$$(19)\quad \varepsilon_{ikl}\frac{\partial' z_i}{\partial u_1}\frac{\partial' z_k}{\partial u_2} = \varepsilon_{ikl}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u_1} + {}'R\frac{\partial \nu_i}{\partial u_1} + \nu_i\frac{\partial' R}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial x_k}{\partial u_2} + {}'R\frac{\partial \nu_k}{\partial u_2} + \nu_k\frac{\partial' R}{\partial u_2}\right).$$

Wegen (17) ist

$$(20)\qquad \frac{\partial x_i}{\partial u_1} + {}'R\frac{\partial \nu_i}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial x_k}{\partial u_2} + {}''R\frac{\partial \nu_k}{\partial u_2} = 0,$$

also

$$(21)\qquad \frac{\partial x_k}{\partial u_2} + {}'R\frac{\partial \nu_k}{\partial u_2} = \frac{\partial x_k}{\partial u_2} - \frac{'R}{''R}\frac{\partial x_k}{\partial u_2} = \frac{''R - {}'R}{''R}\frac{\partial x_k}{\partial u_2}$$

und aus (19) folgt

$$(22)\qquad \varepsilon_{ikl}\frac{\partial' z_i}{\partial u_1}\frac{\partial' z_k}{\partial u_2} = \frac{''R - {}'R}{''R}\frac{\partial' R}{\partial u_1}\varepsilon_{ikl}\nu_i\frac{\partial x_k}{\partial u_2}.$$

Der Ausdruck verschwindet, wenn entweder $'R = {}''R$ oder $\frac{\partial' R}{\partial u_1} = 0$ ist. Im ersten Fall ist der betrachtete Punkt $(u_1, u_2)$ von (1) ein Nabelpunkt und der entsprechende Punkt der Zentrafläche offenbar ein singulärer Punkt, da sich in ihm die beiden Mäntel der Zentrafläche treffen; gilt $'R = {}''R$ identisch, so ist (1) nach § 2 eine Kugel (oder Ebene) und die Zentrafläche artet in den Mittelpunkt von (1) aus oder, wenn (1) eine Ebene ist, in jenen uneigentlichen Punkt, der in der zur Ebene senkrechten Richtung liegt. Im zweiten Fall $\frac{\partial' R}{\partial u_1} = 0$ handelt es sich entweder wieder um einen singulären Punkt der Zentrafläche, oder es ist, wenn $\frac{\partial' R}{\partial u_1}$ identisch verschwindet, $'R$ eine Funktion von $u_2$ allein. Dann folgt aus der ersten Gleichung (20) durch Integration, daß längs der Krümmungslinie $u_2 = \text{konst.}$

$$x_i + {}'R\nu_i = a_i = {}'z_i$$

mit konstanten (d. h. von $u_1$ unabhängigen) $a_i$ oder

$$(23)\qquad (x_i - a_i)(x_i - a_i) = {}'R^2$$

gilt. (23) ist aber die Gleichung einer *Kugel* vom Radius $'R$, auf der die ganze betrachtete Krümmungslinie $u_2 =$ konst. liegt.[1]) Nun folgt andrerseits aus der ersten Gleichung (18) durch Differentiation

$$\frac{\partial\, 'z_i}{\partial u_2} = \frac{\partial x_i}{\partial u_2} + \frac{\partial\, 'R}{\partial u_2} \nu_i + \frac{\partial \nu_i}{\partial u_2}\, 'R$$

und daraus durch Überschiebung mit $\nu_i$

$$\nu_i \frac{\partial\, 'z_i}{\partial u_2} = \frac{\partial\, 'R}{\partial u_2}$$

oder wegen (18)

$$('z_i - x_i)\frac{\partial\, 'z_i}{\partial u_2} = 'R\, \frac{\partial\, 'R}{\partial u_2}; \tag{24}$$

da die $'z_i$ ebenfalls von $u_1$ unabhängig sind, ist (24) die Gleichung einer *Ebene*, der die betrachtete Krümmungslinie $u_2 =$ konst. angehört. Somit besteht *die eine Schar der Krümmungslinien aus lauter Kreisen*, deren Normalenflächen Kegel sind, so daß der zugehörige Mantel der Zentrafläche in eine Kurve *(Zentrakurve)*, den Ort der Kegelscheitel, ausartet. Derartige Flächen sind stets *Hüllflächen einer einparametrigen Kugelschar*, nämlich der Schar der Hauptkugeln mit dem Radius $'R(u_2)$.[2])

Schließen wir diese beiden Fälle aus, so folgt aus (22), daß der Normalenvektor des ersten, zur Schar $u_2 =$ konst. gehörigen Mantels der Zentrafläche senkrecht zur zweiten Hauptkrümmungsrichtung $\frac{\partial x_k}{\partial u_2}$ und senkrecht zur Flächennormalen $\nu_i$, also parallel zur ersten Hauptkrümmungsrichtung $\frac{\partial x_k}{\partial u_1}$ ist. Daraus folgt, daß *die Normalen der Ausgangsfläche* (1) *die Zentrafläche in zwei Punkten berühren, und zwar jeden Mantel in einem Punkt.*

Wir betrachten die Kurvenschar $u_2 =$ konst. auf dem ersten Mantel der Zentrafläche, die mit den Gratlinien der Normalentorsen der Kurven $u_2 =$ konst. auf der Ausgangsfläche identisch ist. Die Schmiegebene einer dieser Gratlinien in einem Punkt $P(u_1, u_2)$ enthält den Normalenvektor $\nu_i$ von (1) und den Tangentenvektor $\frac{\partial x_i}{\partial u_1}$ im zugehörigen Punkt von (1) und somit auch den Normalenvektor der Zentrafläche, der ja, wie eben festgestellt wurde, zu $\frac{\partial x_i}{\partial u_1}$ parallel ist. Daraus folgt (vgl. II, § 5 und VI, § 3): *Die Gratlinien der Normalentorsen einer Fläche* (1) *sind geodätische Linien auf der Zentrafläche von* (1). Selbst-

1) Daß die Schar der Krümmungslinien $u_2 =$ konst. aus sphärischen Kurven besteht, läßt sich auch aus der Differentialgleichung (II, 4, 19) ohne Schwierigkeit bestätigen.

2) Die Umkehrung gilt nicht, da die Ebene (24) die zugehörige Kugel (23) nicht reell schneiden muß. Ist (24) insbesondere Tangentenebene von (23), so ist die Einhüllende im Reellen nur eine Kurve, im Komplexen eine *Mongesche Fläche* (vgl. VII, § 4 A).

verständlich gilt alles, was wir oben für den ersten Mantel der Zentrafläche herleiteten, entsprechend auch für den zweiten.

Verschwinden auf einer auf Krümmungsparameter bezogenen Fläche (1) $\frac{\partial' R}{\partial u_1}$ und $\frac{\partial'' R}{\partial u_2}$ identisch, so *sind beide Scharen von Krümmungslinien Kreise.* Die Zentrafläche artet in zwei Kurven *(Zentrakurven)* aus. Derartige Flächen nennt man *Dupinsche Zykliden.* Sie lassen sich auf zwei Arten als Hüllflächen einparametriger Kugelscharen darstellen. Ein Beispiel einer DUPINschen Zyklide ist der *Torus,* der durch Umdrehung eines Kreises um eine nicht durch seinen Mittelpunkt gehende Gerade entsteht. Die Zentrakurven sind die Drehachse und der Ort der Kreismittelpunkte, der natürlich selbst wieder ein Kreis ist.

Bei Drehflächen ist der eine Mantel der Zentrafläche die durch Umdrehung der Evolute der erzeugenden Kurve entstehende Fläche, während der andere Mantel wieder in die Drehachse ausartet.

## § 4. Das sphärische Bild einer Fläche.

Denkt man sich den Normalenvektor $\nu_i(u_1, u_2)$ einer Fläche

$$x_i = x_i(u_1, u_2) \tag{1}$$

im Ursprung angesetzt, so beschreibt sein Endpunkt ein gewisses, durch den Definitionsbereich der drei Funktionen (1) gegebenes Stück der Einheitskugel, das als *sphärisches Bild* der Fläche (1) bezeichnet wird. Dabei hat man Punkte mit gleichen Parameterwerten als entsprechende Punkte der beiden Flächen anzusehen. Man sagt auch, die Fläche (1) sei durch *parallele Tangentenebenen* auf die Einheitskugel abgebildet. Die Berechtigung dieser Redeweise ergibt sich aus den WEINGARTENschen Formeln (1, 27), die aussagen, daß die Tangentenvektoren der Parameterkurven des sphärischen Bildes in einer Ebenenstellung mit den Tangentenvektoren der Parameterkurven von (1) in entsprechenden Punkten liegen.

Wir berechnen das quadrierte Bogenelement $d\sigma^2$ des sphärischen Bildes. Es wird

$$d\sigma^2 = \frac{\partial \nu_i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial \nu_i}{\partial u_\beta} du_\alpha du_\beta = c_{\alpha\beta} du_\alpha du_\beta, \tag{2}$$

wo nach (1, 27)

$$c_{\alpha\beta} = \frac{\partial \nu_i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial \nu_i}{\partial u_\beta} = b_\alpha^\iota b_\beta^\varkappa \frac{\partial x_i}{\partial u_\iota}\frac{\partial x_i}{\partial u_\varkappa} = g_{\iota\varkappa} b_\alpha^\iota b_\beta^\varkappa = g^{\lambda\mu} b_{\alpha\lambda} b_{\beta\mu} = b_\alpha^\mu b_{\beta\mu} \tag{3}$$

ist. Die $c_{\alpha\beta}$ sind als Überschiebungsresultat zweier Tensoren ebenfalls ein (kovarianter) Tensor, der wegen $c_{\beta\alpha} = g^{\lambda\mu} b_{\beta\lambda} b_{\alpha\mu} = g^{\mu\lambda} b_{\alpha\mu} b_{\beta\lambda} = c_{\alpha\beta}$ so wie

$g_{\alpha\beta}$ und $b_{\alpha\beta}$ symmetrisch ist. Die quadratische Differentialform (2), die erste Grundform des sphärischen Bildes, wird als *dritte Grundform* der Fläche (1) bezeichnet. Zwischen den Diskriminanten $g$, $b$, und $c = c_{11}\, c_{22} - c_{12}^2$ besteht die Relation

$$c = \frac{b^2}{g}. \tag{4}$$

In der Tat folgt aus $c_{\alpha\beta} = b_\alpha^\mu\, b_{\beta\mu}$ und $b_\alpha^\mu = g^{\lambda\mu}\, b_{\alpha\lambda}$

$$c = \begin{vmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \frac{b}{g},$$

daher durch Multiplikation sofort (4). Wegen $g > 0$ ist $c \geqq 0$ und nur dann $c = 0$, wenn $b = 0$, also (1) eine Torse ist (§ 2; $b = 0$ und $K = 0$ ist natürlich gleichbedeutend). Da eine solche nur $\infty^1$ Tangentenebenen besitzt, artet ihr sphärisches Bild in eine Kurve (das Binormalenbild der Gratlinie) aus, also ist auch umgekehrt immer dann $c = 0$, wenn (1) eine Torse ist. Ist das sphärische Bild ein Kreis, so ist (1) eine Torse, deren Tangentenebenen mit einer festen Richtung einen festen Winkel einschließen, also eine Böschungsfläche (vgl. II, § 7B).

Wegen $K = \frac{b}{g}$ kann (4) auch $c = K^2 g$ oder

$$K = \sqrt{\frac{c}{g}} \tag{5}$$

geschrieben werden, wenn das Vorzeichen der Wurzel richtig gewählt wird. Nun ist (III, § 6)

$$do = \sqrt{g}\, du_1\, du_2 \tag{6}$$

das Flächenelement von (1) und

$$d\omega = \sqrt{c}\, du_1\, du_2 \tag{7}$$

das entsprechende Flächenelement des sphärischen Bildes, also folgt aus (5), wieder bei richtiger Wahl der Vorzeichen von $do$ und $d\omega$,

$$K = \frac{d\omega}{do}. \tag{8}$$

Über die Wahl der Vorzeichen ist nun folgendes zu bemerken: Nach einer Bemerkung am Schluß von III, § 2 kann man das Vorzeichen von $\sqrt{g}$ und damit die Orientierung des Normalenvektors beliebig wählen, etwa so, daß $\frac{\partial x_i}{\partial u_1}$, $\frac{\partial x_i}{\partial u_2}$ und $\nu_i$ ein rechtsorientiertes Dreibein bilden, wenn $\sqrt{g} > 0$ ist. Dann ist nach (5) das Vorzeichen von $\sqrt{c}$ bestimmt; da nach (3, 12) $\varepsilon_{ikl} \frac{\partial \nu_i}{\partial u_1} \frac{\partial \nu_k}{\partial u_2} = K \varepsilon_{ikl} \frac{\partial x_i}{\partial u_1} \frac{\partial x_k}{\partial u_2}$ ist, folgt aus (5) und (III, 2, 24)

$$\nu_i = \frac{1}{\sqrt{c}}\, \varepsilon_{ikl} \frac{\partial \nu_k}{\partial u_1} \frac{\partial \nu_l}{\partial u_2}. \tag{9}$$

Somit bilden die Vektoren $\frac{\partial v_i}{\partial u_1}, \frac{\partial v_i}{\partial u_2}$ und $v_i$ ein rechts- oder linksorientiertes Dreibein, je nachdem $\sqrt{c} > 0$ oder $\sqrt{c} < 0$ ist. Also:

*Die sphärische Abbildung einer Fläche ist in elliptischen Punkten* ($K > 0$) *gleichsinnig, in hyperbolischen Punkten* ($K < 0$) *gegensinnig.* Parabolischen Punkten ($K = 0$) einer Fläche müssen also Punkte des sphärischen Bildes entsprechen, die mit gewissen Parametersingularitäten[1]) behaftet sind.

Aus dem Bestehen der Relation (4) erkennt man, daß die drei Tensoren $g_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ und $c_{\alpha\beta}$ nicht unabhängig sind; doch ist diese Abhängigkeit damit noch nicht erschöpfend dargestellt. Es sei ${}_{(\alpha)}\xi$ ein normiertes, in allen Punkten der Fläche definiertes Zweibein. Dann ist nach (III, 3, 41), (III, 4, 5) und (III, 4, 6)

$$g_{\alpha\beta} = {}_{(1)}\xi_{\alpha\,(1)}\xi_\beta + {}_{(2)}\xi_{\alpha\,(2)}\xi_\beta \tag{10}$$

und

$$b_{\alpha\beta} = {}_{(\varkappa\lambda)}b\;{}_{(\varkappa)}\xi_{\alpha\,(\lambda)}\xi_\beta, \tag{11}$$

wo

$${}_{(\varkappa\lambda)}b = b_{\alpha\beta\,(\varkappa)}\xi^\alpha{}_{(\lambda)}\xi^\beta \tag{12}$$

ist. Wir nehmen nun an, das Zweibein ${}_{(\alpha)}\xi$ sei so gewählt, daß die beiden Vektoren ${}_{(\alpha)}\xi$ in jedem Punkt in die Hauptkrümmungsrichtungen fallen; dann folgt aus (12)

$${}_{(11)}b = \frac{1}{'R}, \quad {}_{(12)}b = {}_{(21)}b = 0, \quad {}_{(22)}b = \frac{1}{''R} \tag{13}$$

und somit wird (11)

$$b_{\alpha\beta} = \frac{1}{'R}\,{}_{(1)}\xi_{\alpha\,(1)}\xi_\beta + \frac{1}{''R}\,{}_{(2)}\xi_{\alpha\,(2)}\xi_\beta. \tag{14}$$

Für die Beindarstellung

$$c_{\alpha\beta} = {}_{(\varkappa\lambda)}c\;{}_{(\varkappa)}\xi_{\alpha\,(\lambda)}\xi_\beta \tag{15}$$

folgt wegen (3)

$$\begin{aligned}{}_{(\varkappa\lambda)}c &= c_{\alpha\beta\,(\varkappa)}\xi^\alpha{}_{(\lambda)}\xi^\beta = g^{\varrho\sigma} b_{\alpha\varrho} b_{\beta\sigma\,(\varkappa)}\xi^\alpha{}_{(\lambda)}\xi^\beta \\ &= g^{\varrho\sigma}\left(\frac{1}{'R}\,{}_{(1)}\xi_{\alpha\,(1)}\xi_\varrho + \frac{1}{''R}\,{}_{(2)}\xi_{\alpha\,(2)}\xi_\varrho\right)\left(\frac{1}{'R}\,{}_{(1)}\xi_{\beta\,(1)}\xi_\sigma + \frac{1}{''R}\,{}_{(2)}\xi_{\beta\,(2)}\xi_\sigma\right){}_{(\varkappa)}\xi^\alpha{}_{(\lambda)}\xi^\beta,\end{aligned}$$

also wegen $g^{\varrho\sigma}{}_{(\varkappa)}\xi_{\varrho\,(\lambda)}\xi_\sigma = \delta_{\varkappa\lambda}$, ${}_{(\mu)}\xi_{\alpha\,(\nu)}\xi^\alpha = \delta_{\mu\nu}$

$${}_{(11)}c = \frac{1}{'R^2}, \quad {}_{(12)}c = {}_{(21)}c = 0, \quad {}_{(22)}c = \frac{1}{''R^2}; \tag{16}$$

1) Vgl. die Fußnote S. 82.

(15) wird somit

$$c_{\alpha\beta} = \frac{1}{'R^2}\,{}_{(1)}\xi_{\alpha\,(1)}\xi_\beta + \frac{1}{''R^2}\,{}_{(2)}\xi_{\alpha\,(2)}\xi_\beta$$

$$= \left(\frac{1}{'R}\,{}_{(1)}\xi_{\alpha\,(1)}\xi_\beta + \frac{1}{''R}\,{}_{(2)}\xi_{\alpha\,(2)}\xi_\beta\right)\left(\frac{1}{'R} + \frac{1}{''R}\right) - \frac{1}{'R\,''R}\left({}_{(1)}\xi_{\alpha\,(1)}\xi_\beta + {}_{(2)}\xi_{\alpha\,(2)}\xi_\beta\right),$$

also ist

$$c_{\alpha\beta} - 2Hb_{\alpha\beta} + Kg_{\alpha\beta} = 0, \tag{17}$$

d. h. *die drei Grundformen einer Fläche sind linear abhängig.*

Aus (17) folgt, daß neben den Kugeln die Flächen, deren mittlere Krümmung $H$ verschwindet (identisch in den $u_\alpha$), die charakteristische Eigenschaft haben, daß ihre sphärische Abbildung zugleich *konform* ist. In der Tat folgt aus $c_{\alpha\beta} = \varrho g_{\alpha\beta}$ entweder $b_{\alpha\beta} = \sigma g_{\alpha\beta}$, also nach § 2 die Kugeln (bei Ebenen verliert die Fragestellung jeden Sinn), oder $H = 0$ (in diesem Fall ist $\varrho = -K$). Die Flächen mit $H = 0$ heißen *Minimalflächen;* wir werden uns in VII, § 3, eingehend mit ihnen beschäftigen.

## § 5. Konjugierte Netze und Asymptotenlinien.

Wir definierten schon zu Beginn von § 3: Ein Kurvennetz heißt konjugiert, wenn die Richtungen der beiden Netzkurven in einem beliebigen Flächenpunkt $P$ zu den Asymptotenrichtungen in $P$ konjugiert sind. Bezeichnen wir mit $du_\alpha$ und $\delta u_\alpha$ die Richtungen der beiden Kurven eines gegebenen Netzes im Punkt $P(u_1, u_2)$, so ist nach III, § 3

$$b_{\alpha\beta}\, du_\alpha\, \delta u_\beta = 0 \tag{1}$$

notwendig und hinreichend dafür, daß diese beiden Richtungen konjugiert sind. Man nennt (1) die *Involution konjugierter Richtungen* im Punkt $P$. Die Asymptotenrichtungen, für die

$$b_{\alpha\beta}\, du_\alpha\, du_\beta = 0 \tag{2}$$

ist, sind also als Doppelrichtungen der Involution (1) zu sich selbst konjugiert.

Bilden die Parameterkurven ein konjugiertes Netz, so entspricht in jedem Punkt der Richtung $du_1 = 0$ die Richtung $du_2 = 0$, d. h. es muß wegen (1) in jedem Punkt $b_{12} = 0$ sein. Sind die zugleich konjugierten und orthogonalen Krümmungslinien die Parameterkurven, so ist $b_{12} = g_{12} = 0$ und umgekehrt (§ 3).

Sei nun eine quadratische Differentialgleichung

$$a_{\alpha\beta}\, du_\alpha\, du_\beta = 0 \tag{3}$$

gegeben. Von den $a_{\alpha\beta}$ nehmen wir an, daß sie die kovarianten Komponenten eines symmetrischen ($a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$)-Tensors zweiter Stufe sind. Ferner sei die Diskriminante $a = a_{11} a_{22} - (a_{12})^2$ von Null verschieden. Wir denken uns die linke Seite von (3) in ein Produkt zweier Faktoren zerlegt:

$$a_{\alpha\beta} du_\alpha du_\beta = \overset{1}{a}_\alpha du_\alpha \cdot \overset{2}{a}_\beta du_\beta, \tag{4}$$

so daß

$$a_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\left(\overset{1}{a}_\alpha \overset{2}{a}_\beta + \overset{2}{a}_\alpha \overset{1}{a}_\beta\right) \tag{5}$$

ist. Diese Zerlegung ist reell, wenn $a < 0$ ist. Die beiden Nullrichtungen von (3) sind durch die beiden linearen Differentialgleichungen

$$\overset{1}{a}_\alpha du_\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \overset{2}{a}_\beta \delta u_\beta = 0 \tag{6}$$

gegeben. Die beiden Richtungen $du_\alpha$ und $\delta u_\beta$, die in einem Punkt $P$ durch (6) bestimmt sind, sind konjugiert, wenn sie der Bedingung (1) genügen. (1) und die zweite Gleichung (6) sind lineare homogene Gleichungen für die $\delta u_\beta$; durch Elimination derselben ergibt sich, wenn wir zur Determinantenbildung in gewohnter Weise den $\varepsilon$-Tensor verwenden,

$$\varepsilon^{\varkappa\lambda} \overset{2}{a}_\varkappa b_{\alpha\lambda} du_\alpha = 0. \tag{7}$$

Eliminieren wir ähnlich aus (7) und der ersten Gleichung (6) die $du_\alpha$, so folgt

$$\varepsilon^{\varkappa\lambda} \varepsilon^{\mu\nu} b_{\lambda\mu} \overset{1}{a}_\varkappa \overset{2}{a}_\mu = \tfrac{1}{2} \varepsilon^{\varkappa\lambda} \varepsilon^{\mu\nu} b_{\lambda\mu} (\overset{1}{a}_\varkappa \overset{2}{a}_\mu + \overset{2}{a}_\varkappa \overset{1}{a}_\mu),$$

also wegen (5)

$$\varepsilon^{\varkappa\lambda} \varepsilon^{\mu\nu} a_{\varkappa\mu} b_{\lambda\nu} = 0 \tag{8}$$

als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Nullrichtungen von (3) im betrachteten Punkt konjugiert sind. Sind die $a_{\alpha\beta}$ Funktionen der $u_\alpha$ und ist (8) identisch erfüllt, so ist das durch (3) unter den in III, § 8 A angegebenen Voraussetzungen definierte Kurvennetz konjugiert.

Ist insbesondere $a_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$, so wird aus (8)

$$\varepsilon^{\varkappa\lambda} \varepsilon^{\mu\nu} g_{\varkappa\mu} b_{\lambda\nu} = g^{\lambda\nu} b_{\lambda\nu} = 0, \tag{9}$$

die Bedingung dafür, daß *die ametrischen Kurven einer Fläche konjugiert sind*. Wegen $H = \frac{1}{2} g^{\lambda\nu} b_{\lambda\nu}$ (vgl. § 1) ist das nur auf den am Schluß des vorigen Paragraphen erwähnten *Minimalflächen* der Fall, so daß wir damit bereits eine zweite charakteristische Eigenschaft dieser Flächen gefunden haben.

Die konjugierten Richtungen in einem Flächenpunkt $P$ besitzen eine einfache geometrische Deutung, die wir noch kurz erörtern wollen. Es sei $C$ eine durch $P$ mit der Richtung $du_\alpha$ hindurchgehende Flächenkurve. Die Hüllfläche der einparametrigen Schar der Tangentenebenen

$$(z_i - x_i)\, \nu_i = 0 \tag{10}$$

der Fläche in den Punkten von $C$ ist eine Torse, die man *die der Fläche längs $C$ umschriebene Torse* nennt. Für die Erzeugende der Torse in $P$ gilt neben (10) noch die aus (10) durch Differentiation entstehende Gleichung, die sich wegen $\nu_i\,dx_i = 0$ auf

$$(z_i - x_i)\,d\nu_i = 0 \tag{11}$$

reduziert. Nach (10) ist $z_i - x_i = \delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}\,\delta u_\alpha$ und wegen (11) gilt

$$\delta x_i\,d\nu_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}\,\frac{\partial \nu_i}{\partial u_\beta}\,\delta u_\alpha\,du_\beta = -\,b_{\alpha\beta}\,\delta u_\alpha\,du_\beta = 0\,, \tag{12}$$

d. h. aber nach (1), daß $\delta u_\alpha$ die zur Richtung $du_\beta$ konjugierte Richtung ist. Also:

*Die Erzeugenden der einer Fläche längs einer Kurve $C$ umschriebenen Torse haben in jedem Punkt von $C$ die zur Tangentenrichtung von $C$ konjugierte Richtung.* Oder:

*Von den zwei konjugierten Richtungen eines Flächenpunktes $P$ gibt jede die Richtung der Drehachse der Tangentenebene an, wenn ihr Berührungspunkt durch $P$ in der anderen Richtung hindurchgeht.*

Die beiden wichtigsten charakteristischen Eigenschaften der Asymptotenlinien haben wir schon in § 1 erwähnt. Da sowohl die Schmiegebene einer Kurve als auch die Tangentenebene einer Fläche Begriffe der projektiven Geometrie sind, gilt dasselbe offenbar auch für die Asymptotenlinien, die sich ja nach der zweiten a. a. O. angegebenen Eigenschaft als jene Flächenkurven definieren lassen, deren Schmiegebenen zugleich Tangentenebenen der Fläche sind.[1])

Macht man die Asymptotenlinien zu Parameterkurven, so wird $b_{11} = b_{22} = 0$, $b_{12} \neq 0$, da ja $du_\alpha = 0$ die Lösungen von (2) sein müssen. Wir sprechen dann kurz von *Asymptotenparametern.* Sie existieren auf reellen Flächen nur in hyperbolischen Punkten und weisen in parabolischen Punkten stets gewisse Singularitäten auf (vgl. III, § 2).

Die *Torsion* der nicht geradlinigen Asymptotenlinien steht in einem bemerkenswert einfachen Zusammenhang mit der Gaussschen Krümmung. Da die Binormalen der Asymptotenlinien mit den Flächennormalen zusammenfallen, erhält man für das Quadrat der Bogenlänge $ds_3$ des Binormalenbildes (vgl. II, § 3) wegen (4, 2)

$$ds_3^2 = d\sigma^2 = c_{\alpha\beta}\,du_\alpha\,du_\beta; \tag{13}$$

1) Sieht man alle $\infty^1$ Ebenen durch eine geradlinige Flächenkurve als Schmiegebenen an, so fällt eine derselben stets in die Tangentenebene und auch aus der obigen Definition folgt, daß Gerade auf der Fläche stets Asymptotenlinien sind.

da längs einer Asymptotenlinie $b_{\alpha\beta}\, du_\alpha\, du_\beta = 0$ ist, folgt aus (4, 17)

(14) $$ds_3^2 = -K g_{\alpha\beta} du_\alpha du_\beta = -K ds^2.$$

Somit ist nach (II, 3, 4) die Torsion der Asymptotenlinien

(15) $$\tau^2 = -K$$

*(Satz von Beltrami-Enneper).* Bei Geraden ist nach (II, 3, 11) die Torsion unbestimmt; daß (15) auch in diesem Fall einen Wert für die Torsion liefert, ist darauf zurückzuführen, daß an Stelle der unbestimmten Binormalen die bestimmte Flächennormale gesetzt wurde.

In hyperbolischen Punkten ist die Torsion der Asymptotenlinien reell, in elliptischen rein imaginär. Das Vorzeichen ist durch (15) nicht festgelegt; wir zeigen noch, daß von den beiden durch einen hyperbolischen Flächenpunkt $P(u_1, u_2)$ gehenden reellen Asymptotenlinien die eine positive, die andere negative Torsion hat. Wir benützen zu diesem Zweck wie in § 4 das Zweibein ${}_{(\alpha)}\xi$ in den Hauptkrümmungsrichtungen von $P$. Sei $\vartheta$ der Winkel, den die eine — etwa die in dem durch die beiden Vektoren ${}_{(\alpha)}\xi$ bestimmten Winkelraum gelegene — Asymptote mit der ersten Hauptkrümmungsrichtung einschließt. Dann ist nach § 2 $\tan\vartheta = \sqrt{-\frac{''R}{'R}} > 0$ und

(16) $$\cos\vartheta = \sqrt{\frac{'R}{'R - ''R}} > 0, \quad \sin\vartheta = \sqrt{\frac{''R}{''R - 'R}} > 0.$$

Bezeichnen wird dann mit ${}_{(\sigma)}\lambda$ die im allgemeinen nicht senkrechten Einheitsvektoren in den Asymptotenrichtungen von $P$, so ist

(17) $${}_{(\sigma)}\lambda^\alpha = {}_{(1)}\xi^\alpha \cos\vartheta \pm {}_{(2)}\xi^\alpha \sin\vartheta,$$

wo, wie auch immer im folgenden, das obere Zeichen für die erste, das untere für die zweite Asymptotenrichtung gilt.

Nach (II, 2, 13) gilt

(18) $$\tau = \zeta_i\, \eta_i' = -\eta_i\, \zeta_i',$$

da aus $\eta_i \zeta_i = 0$ durch Differentiation $\eta_i \zeta_i' + \eta_i'\, \zeta_i = 0$ folgt. Für die Asymptotenlinien ist $\zeta_i = \nu_i$ bei geeigneter Orientierung von $\nu_i$, während die beiden Hauptnormalenvektoren ${}_{(\sigma)}\eta_i$ in der Tangentenebene senkrecht zu den Richtungen (17) liegen.[1]) Also hat

$$\zeta_i' = \nu_i' = -b_\alpha^\gamma \frac{\partial x_i}{\partial u_\gamma} \frac{du_\alpha}{ds}$$

1) Die Torsion ist unabhängig von der Wahl des Vorzeichens der Krümmung, denn mit $\varkappa$ ändert $\eta_i$ und somit auch $\zeta_i$ das Vorzeichen, da das begleitende Dreibein stets rechtsorientiert ist, und $\tau$ bleibt nach (18) ungeändert.

die kontravarianten Komponenten $-b_\alpha^\gamma \frac{du_\alpha}{ds}$ und ${}_{(\sigma)}\eta_i$ die kovarianten Komponenten $\varepsilon_{\alpha\beta}\,{}_{(\sigma)}\lambda^\beta$; da ferner $\frac{du_\alpha}{ds} = {}_{(\sigma)}\lambda^\alpha$ ist, folgt für die Torsion aus (18)

$$ {}_{(\sigma)}\tau = -{}_{(\sigma)}\eta_i\,{}_{(\sigma)}\zeta_i' = \varepsilon_{\alpha\beta}\,{}_{(\sigma)}\lambda^\beta b_\gamma^\alpha\,{}_{(\sigma)}\lambda^\gamma = \varepsilon_{\alpha\beta} b_\gamma^\alpha\,{}_{(\sigma)}\lambda^\beta\,{}_{(\sigma)}\lambda^\gamma, $$

wobei aber über $\sigma$ *nicht* zu summieren ist; $\sigma$ unterscheidet nur die beiden Asymptotenrichtungen! Weiter ist nach (4, 14) und (III, 4, 13)

$$ \begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} b_\gamma^\alpha &= \left({}_{(1)}\xi_\alpha\,{}_{(2)}\xi_\beta - {}_{(2)}\xi_\alpha\,{}_{(1)}\xi_\beta\right)\left(\frac{1}{'R}\,{}_{(1)}\xi^\alpha\,{}_{(1)}\xi_\gamma + \frac{1}{''R}\,{}_{(2)}\xi^\alpha\,{}_{(2)}\xi_\gamma\right) \\ &= \frac{1}{'R}\,{}_{(2)}\xi_\beta\,{}_{(1)}\xi_\gamma - \frac{1}{''R}\,{}_{(1)}\xi_\beta\,{}_{(2)}\xi_\gamma \end{aligned} $$

und nach (17)

$$ {}_{(\sigma)}\lambda^\beta\,{}_{(\sigma)}\lambda^\gamma = {}_{(1)}\xi^\beta\,{}_{(1)}\xi^\gamma \cos^2\vartheta \pm \left({}_{(1)}\xi^\beta\,{}_{(2)}\xi^\gamma + {}_{(2)}\xi^\beta\,{}_{(1)}\xi^\gamma\right)\sin\vartheta\cos\vartheta + {}_{(2)}\xi^\beta\,{}_{(2)}\xi^\gamma \sin^2\vartheta, $$

also wird

$$ {}_{(\sigma)}\tau = \pm\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{1}{'R} - \frac{1}{''R}\right) = \mp\frac{1}{\sqrt{-'R''R}} = \mp\sqrt{-K}. $$

Es ist in der Tat ${}_{(1)}\tau = -\sqrt{-K}$ und ${}_{(2)}\tau = +\sqrt{-K}$, w. z. b. w. Durch die obigen Festsetzungen sind die begleitenden Dreibeine beider Asymptotenlinien in $P$ gleich, d. h. rechtsorientiert, was man eben nur durch bestimmte Wahl des Vorzeichens der Torsion erreichen kann.

## § 6. Ergänzungen und Beispiele.

**A. Formeln für die Flächendarstellung $z = f(x, y)$.** Wir bezeichnen hier der Einfachheit halber die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten eines Punktes nicht mit $x_1, x_2, x_3$, sondern mit $x$, $y$, $z$. Wie schon in III, § 1 erwähnt, ist die Darstellung

$$ z = f(x, y) \tag{1} $$

als spezieller Fall der bisher ausschließlich verwendeten Parameterdarstellung anzusehen, so daß sich die Formeln durch unmittelbares Einsetzen aus den bisher gewonnenen ergeben. Wir stellen daher die wichtigsten ohne nähere Begründung, die dem Leser überlassen sei, zusammen.

Zur Abkürzung wird

$$ \frac{\partial f}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = t \tag{2} $$

gesetzt. Dann ist

$$ g_{11} = 1 + p^2, \quad g_{12} = pq, \quad g_{22} = 1 + q^2, \tag{3} $$

$$ g = g_{11} g_{22} - (g_{12})^2 = 1 + p^2 + q^2. \tag{4} $$

Die Komponenten des Normalenvektors sind

$$(5)\qquad \nu_1 = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \nu_2 = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \nu_3 = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

bei willkürlich wählbarem Vorzeichen der Wurzel. Daraus folgt

$$(6)\qquad b_{11} = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad b_{12} = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad b_{22} = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Zwei Richtungen $dx:dy$ und $\delta x:\delta y$ sind orthogonal, wenn

$$(7)\qquad (1+p^2)\,dx\,\delta x + pq\,(dx\,\delta y + \delta x\,dy) + (1+q^2)\,dy\,\delta y = 0$$

ist, und sind konjugiert, wenn

$$(8)\qquad r\,dx\,\delta x + s\,(dx\,\delta y + \delta x\,dy) + t\,dy\,\delta y = 0$$

ist. Daraus folgt die etwas verwickelte Differentialgleichung der Krümmungslinien

$$(9)\qquad [pqr - s(1+p^2)]\,dx^2 + [r(1+q^2) - t(1+p^2)]\,dx\,dy - [pqt - s(1+q^2)]\,dy^2 = 0.$$

Die Differentialgleichung der Asymptotenlinien ist

$$(10)\qquad r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0.$$

Krümmung $K$ und mittlere Krümmung $H$ berechnen sich aus

$$(11)\qquad K = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2},\quad H = \frac{r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2)}{2\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}}.$$

Die Flächendarstellung $z = f(x, y)$ ist insbesondere dann zweckmäßig, wenn es sich um Untersuchung von Eigenschaften der Fläche handelt, bei denen irgend eine Richtung im Raum ausgezeichnet ist, die man dann zur $z$-Achse macht; verwendbar ist die Darstellung für alle Flächen, die nicht Zylinder mit zur $z$-Achse parallelen Erzeugenden sind. Wir erwähnen die Theorie der *Geländeflächen*, die, ohne geometrisch irgendwie ausgezeichnet zu sein, Formen der Erdoberfläche näherungsweise darstellen (die Erde selbst wird dabei als Ebene angenommen, was bei hinreichend klein genommenen Bereichen natürlich zulässig ist). Man kommt von diesem Gesichtspunkt aus zu eigenartigen Fragestellungen, z. B. zum *Problem des Talweges*, das ist der Weg, den ein der Schwere unterworfener Punkt auf der Fläche zurücklegt. Das Gegenstück zum Talweg ist der Kammweg.[1])

1) Vgl. hierzu R. Rothe, Sitzungsberichte der Berliner math. Ges. XIV, 1915.

Wir erwähnen in diesem Zusammenhang noch, daß die *Schichtenlinien* einer Fläche (1), d. h. die Schnittkurven von (1) mit Ebenen, die parallel zur $xy$-Ebene (Grundrißebene) sind, die Differentialgleichung

$$p\,dx + q\,dy = 0 \tag{12}$$

haben, wie sich aus $z =$ konst. ohne weiteres ergibt. Ihre orthogonalen Trajektorien (orthogonal sowohl auf der Fläche als auch im Grundriß) sind die *Fallinien* mit der Differentialgleichung

$$q\,dx - p\,dy = 0. \tag{13}$$

Die linke Seite von (13) ist ein vollständiges Differential für die Integralflächen der LAPLACEschen Differentialgleichung

$$r + t = 0. \tag{14}$$

**B. Formeln für die Flächendarstellung $F(x_1, x_2, x_3) = 0$.** Da diese Darstellung in keinem so einfachen Zusammenhang mit der Parameterdarstellung steht wie die in A. behandelte, wollen wir hier etwas ausführlicher vorgehen. Wir setzen zur Abkürzung

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = F_i, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\, \partial x_k} = F_{ik}, \ \ldots$$

Aus

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{15}$$

folgt, wenn $dx_i$ eine beliebige Richtung auf der Fläche (Tangentenvektor der Fläche) ist, durch Differentiation

$$F_i\, dx_i = 0. \tag{16}$$

Der Vektor $F_i$ heißt *Gradient* des Skalars $F$. Da (16), wie erwähnt, für alle Flächenvektoren $dx_i$ gilt, steht $F_i$ auf der Tangentenebene senkrecht und ist also parallel zum Normalenvektor, der also

$$\nu_i = \frac{F_i}{\sqrt{F_j F_j}} \tag{17}$$

ist. Zwei Richtungen $dx_i$ und $\delta x_i$ stehen aufeinander senkrecht, wenn

$$dx_i\, \delta x_i = 0 \tag{18}$$

ist. Das quadrierte Bogenelement der Fläche (15) wird

$$ds^2 = dx_i\, dx_i, \tag{19}$$

wobei die $dx_i$ der Gleichung (16) zu genügen haben, das des sphärischen Bildes

$$d\sigma^2 = d\nu_i\, d\nu_i, \tag{20}$$

wobei

$$(21)\qquad d\nu_i = \frac{\partial \nu_i}{\partial x_k} d x_k = \frac{1}{\sqrt{(F_j F_j)^3}} (F_j F_j F_{ik} - F_i F_j F_{jk})\, d x_k .$$

Aus $\nu_i \nu_i = 1$ folgt

$$(22)\qquad \nu_i\, d\nu_i = 0,$$

oder

$$\nu_i \frac{\partial \nu_i}{\partial x_k} d x_k = 0;$$

da diese Relation identisch in den $d x_k$ gilt, folgt weiter

$$(23)\qquad \nu_i \frac{\partial \nu_i}{\partial x_k} = 0$$

und daraus durch Elimination der $\nu_i$

$$(24)\qquad \left| \frac{\partial \nu_i}{\partial x_k} \right| = \varepsilon_{ikl} \frac{\partial \nu_1}{\partial x_i} \frac{\partial \nu_2}{\partial x_k} \frac{\partial \nu_3}{\partial x_l} = \frac{1}{6} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{pqr} \frac{\partial \nu_p}{\partial x_i} \frac{\partial \nu_q}{\partial x_k} \frac{\partial \nu_r}{\partial x_l} = 0$$

[vgl. (I, 5, 18)].

Es sei $x_i = x_i(u_1, u_2)$ eine Parameterdarstellung der Fläche (1), so daß (1) identisch erfüllt ist, wenn wir die drei Funktionen $x_i(u_1, u_2)$ in (1) einsetzen. Zwei Richtungen $d x_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} d u_\alpha$ und $\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \delta u_\alpha$ sind *konjugiert*, wenn (5, 1) gilt; beachten wir die Definition (1, 7) der $b_{\alpha\beta} = -\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \frac{\partial \nu_i}{\partial u_\beta} = -\frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} \frac{\partial \nu_i}{\partial u_\alpha}$, so erhalten wir ohne weiteres die Bedingung in der Form

$$d x_i\, \delta \nu_i = \delta x_i\, d \nu_i = 0,$$

oder, wegen (21) und (16),

$$(25)\qquad F_{ik}\, d x_i\, \delta x_k = 0.$$

Die *Differentialgleichung der Asymptotenlinien* wird somit

$$(26)\qquad d x_i\, d \nu_i = 0$$

oder

$$(26')\qquad F_{ik}\, d x_i\, d x_k = 0.$$

Die beiden Hauptkrümmungsrichtungen eines Flächenpunktes sind konjugiert und orthogonal, genügen also den Bedingungen

$$d\nu_i\, \delta x_i = 0 \quad \text{und} \quad d x_i\, \delta x_i = 0.$$

Wir fügen noch die Identität $\nu_i \delta x_i = 0$ hinzu und erhalten durch Elimination der $\delta x_i$ aus diesen drei Gleichungen die *Differentialgleichung der Krümmungslinien*

$$(27)\qquad \varepsilon_{ikl}\, \nu_i\, d x_k\, d \nu_l = 0,$$

oder, wegen (17) und (21),

(28)
$$\varepsilon_{ikl} F_i F_{lh}\, dx_k\, dx_h = 0.$$

Zur Bestimmung der Hauptkrümmungen gehen wir von der Formel von RODRIGUES (3, 8)

$$dv_i + \frac{1}{R} dx_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dx_k + \frac{1}{R} dx_i = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \delta_{ik}\frac{1}{R}\right) dx_k = 0$$

aus und erhalten durch Elimination der $dx_i$ die Gleichung für die Hauptkrümmungen in der Form

(29)
$$\varepsilon_{ikl}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_i} + \delta_{1i}\frac{1}{R}\right)\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_k} + \delta_{2k}\frac{1}{R}\right)\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_l} + \delta_{3l}\frac{1}{R}\right) = 0,$$

die wegen (24) in $\frac{1}{R}$ nur scheinbar vom dritten Grad ist. Ausführlich wird (29) nach Unterdrückung eines Faktors $\frac{1}{R}$

$$\left[\varepsilon_{ikl}\delta_{1i}\frac{\partial v_2}{\partial x_k}\frac{\partial v_3}{\partial x_l} + \varepsilon_{ikl}\frac{\partial v_1}{\partial x_i}\delta_{2k}\frac{\partial v_3}{\partial x_l} + \varepsilon_{ikl}\frac{\partial v_1}{\partial x_i}\frac{\partial v_2}{\partial x_k}\delta_{3l}\right]$$
$$+\left[\varepsilon_{ikl}\frac{\partial v_1}{\partial x_i}\delta_{2k}\delta_{3l} + \varepsilon_{ikl}\delta_{1i}\frac{\partial v_2}{\partial x_k}\delta_{3l} + \varepsilon_{ikl}\delta_{1i}\delta_{2k}\frac{\partial v_3}{\partial x_l}\right]\frac{1}{R}$$
$$+\varepsilon_{ikl}\delta_{1i}\delta_{2k}\delta_{3l}\frac{1}{R^2} = 0.$$

Wir behandeln die drei Koeffizienten getrennt weiter. Für den ersten ergibt sich

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\frac{\partial v_3}{\partial x_3} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_1} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)^2 - \frac{\partial v_k}{\partial x_l}\frac{\partial v_l}{\partial x_k}\right].$$

Für den Koeffizienten von $\frac{1}{R}$ erhält man den einfachen Ausdruck $\frac{\partial v_i}{\partial x_i}$, während der Koeffizient von $\frac{1}{R^2}$ gleich 1 wird; beides folgt unmittelbar aus den einfachsten Eigenschaften des $\varepsilon$-Tensors. Die Gleichung für die Hauptkrümmungen lautet also endgiltig

(30)
$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right)^2 - \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right] + \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} = 0.$$

Für die Krümmung $K$ und die mittlere Krümmung $H$ folgen daraus die Formeln

(31)
$$K = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right)^2 - \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right]$$

und

(32)
$$H = -\frac{1}{2}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

**C. Dreifach orthogonale Flächensysteme.** Wir betrachten eine allgemeine zulässige (im Sinn von III, § 1) Koordinatentransformation im Raum

$$x_i = x_i(y_1, y_2, y_3), \quad y_i = y_i(x_1, x_2, x_3); \tag{33}$$

die $x_i$ seien dabei rechtwinklige Koordinaten wie bisher, die $y_i$ heißen *allgemeine (krummlinige) Koordinaten* (z. B. Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten). Für das quadrierte Bogenelement

$$ds^2 = dx_i\, dx_i \tag{34}$$

ergibt sich wegen $dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial y_j} dy_j$, wenn wir

$$\frac{\partial x_j}{\partial y_i} \frac{\partial x_j}{\partial y_k} = g_{ik} \tag{35}$$

setzen,

$$ds^2 = g_{ik}\, dy_i\, dy_k, \tag{36}$$

also eine ebenso wie (34) positiv definite quadratische Differentialform. Wir betrachten insbesondere *orthogonale Koordinaten* $y_i$; für solche ist

$$g_{23} = g_{31} = g_{12} = 0 \tag{37}$$

notwendig und hinreichend.[1]) Die Koordinatenflächen

$$y_i(x_1, x_2, x_3) = \text{konst.} \tag{38}$$

bilden dann ein sogenanntes *dreifach orthogonales Flächensystem*, d. h. drei einparametrige Flächenscharen mit der charakteristischen Eigenschaft, daß die Tangentenebenen zweier Flächen aus verschiedenen Scharen in jedem Punkt der Schnittkurve aufeinander senkrecht stehen.

Während in der Ebene oder auf einer Fläche zu jeder einparametrigen Kurvenschar eine Schar orthogonaler Trajektorien existiert (III, § 8F), ist das bei Flächenscharen im Raum im allgemeinen nicht der Fall.

Wir betrachten zunächst zwei orthogonale Scharen, etwa $y_1 =$ konst. und $y_2 =$ konst. Ihre Normalenvektoren sind nach (17) bzw. parallel zu $\frac{\partial y_1}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial y_2}{\partial x_i}$, die Orthogonalitätsbedingung ist also

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_i} \frac{\partial y_2}{\partial x_i} = 0. \tag{39}$$

---

1) Man beachte, daß z. B. $\frac{\partial x_j}{\partial y_1}$ der Tangentenvektor der Schnittkurve der Flächen $y_2 =$ konst. und $y_3 =$ konst. ist.

Der Normalenvektor $\frac{\partial y_3}{\partial x_i}$ der dritten orthogonalen Schar $y_3 =$ konst. muß auf diesen beiden senkrecht stehen, also in der Form

$$\frac{\partial y_3}{\partial x_i} = \lambda \varepsilon_{ikl} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} \frac{\partial y_2}{\partial x_l} = \lambda A_i, \quad \lambda \neq 0 \tag{40}$$

darstellbar sein. Ist $d x_i$ eine Fortschreitungsrichtung auf der Fläche $y_3 =$ konst., so ist $\frac{\partial y_3}{\partial x_i} d x_i = 0$, und aus (40) folgt durch Überschiebung mit $d x_i$

$$A_i \, d x_i = \varepsilon_{ikl} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} \frac{\partial y_2}{\partial x_l} d x_i = 0. \tag{41}$$

Die Integrabilitätsbedingung einer derartigen linearen Differentialform erhält man aus

$$\varepsilon_{hij} \frac{\partial (\lambda A_i)}{\partial x_j} = 0$$

durch Überschiebung mit $A_h$ in der Form

$$\varepsilon_{hij} A_h \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = 0, \tag{42}$$

oder ausführlicher

$$\varepsilon_{hij} \varepsilon_{hpq} \varepsilon_{ikl} \frac{\partial y_1}{\partial x_p} \frac{\partial y_2}{\partial x_q} \left( \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial y_2}{\partial x_l} + \frac{\partial y_1}{\partial x_k} \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_j \partial x_l} \right) = 0. \tag{43}$$

Wegen $\varepsilon_{hij} \varepsilon_{hpq} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}$, $\varepsilon_{ikl} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} = 0$ und $\varepsilon_{ikl} \frac{\partial y_2}{\partial x_i} \frac{\partial y_2}{\partial x_k} = 0$ wird daraus

$$\varepsilon_{ikl} \left( \frac{\partial y_1}{\partial x_i} \frac{\partial y_2}{\partial x_j} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial y_2}{\partial x_l} - \frac{\partial y_1}{\partial x_j} \frac{\partial y_2}{\partial x_i} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_j \partial x_l} \right) = 0. \tag{44}$$

Nun folgt aus (39) durch Differentiation

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \frac{\partial y_1}{\partial x_i} \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_i \partial x_j} = 0; \tag{45}$$

verwenden wir diese Relation zur Umformung des zweiten Gliedes von (44) und vertauschen wir im ersten Glied die Indizes $i$, $k$, $l$ zyklisch, so ergibt sich

$$\varepsilon_{ikl} \frac{\partial y_2}{\partial x_i} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_j \partial x_l} \frac{\partial y_2}{\partial x_j} = 0. \tag{46}$$

Man erkennt daraus, daß zu zwei orthogonalen Flächenscharen sich durchaus nicht immer eine dritte, zu beiden orthogonale angeben läßt; notwendig und hinreichend für die Existenz einer derartigen dritten Schar ist (46) oder die durch Vertauschung von $y_1$ mit $y_2$ entstehende Bedingung. (46) besitzt eine einfache geometrische Deutung. Ist nämlich $\delta x_i$ die Richtung der Schnittkurve der Flächen $y_1 =$ konst. und $y_2 =$ konst., so ist

$$\delta x_i = \mu \varepsilon_{ikl} \frac{\partial y_1}{\partial x_l} \frac{\partial y_2}{\partial x_k}, \tag{47}$$

so daß (46) auch

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial y_2}{\partial x_j} \delta x_i = 0 \tag{48}$$

geschrieben werden kann; andrerseits gilt aber auch

$$\frac{\partial y_2}{\partial x_j} = \nu \varepsilon_{jhk} \frac{\partial y_1}{\partial x_h} \delta x_k, \tag{49}$$

so daß (48) zu

$$\varepsilon_{jhk} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial y_1}{\partial x_h} \delta x_i \delta x_k = 0 \tag{50}$$

wird. Der Vergleich mit (28) gibt den Satz von DARBOUX:

*Notwendig und hinreichend dafür, daß zwei orthogonale Flächenscharen sich durch eine dritte zu einem dreifach orthogonalen System ergänzen lassen, ist, daß die Schnittkurve je zweier Flächen für beide eine Krümmungslinie ist.*

Darin ist der ältere Satz von DUPIN enthalten:

*Die Flächen eines dreifach orthogonalen Systems schneiden einander in Krümmungslinien.*

Man erkennt ferner, daß sich im allgemeinen nicht einmal eine einzige Flächenschar in ein dreifach orthogonales System einbetten läßt; es müßte ja die Fläche, die von den längs einer Krümmungslinie einer Fläche der Schar errichteten orthogonalen Trajektorien gebildet wird, von allen Flächen der Schar wieder in Krümmungslinien durchsetzt werden. Dagegen gibt es zu jeder einparametrigen Kugel- und Ebenenschar sogar unendlich viele dreifach orthogonale Systeme; man erhält ein solches, wenn man auf einer Kugel oder Ebene ein beliebiges orthogonales Netz wählt und jene Flächen bestimmt, die von den längs der Kurven des Netzes errichteten orthogonalen Trajektorien der Schar gebildet werden, wie sich der Leser selbst des näheren überlegen möge.

Ein bekanntes und wichtiges Beispiel eines dreifach orthogonalen Systems ist die Schar

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i - y} = 1 \tag{51}$$

konfokaler Flächen zweiten Grades. Ist $a_1 > a_2 > a_3$, so ist (51) ein Ellipsoid für $y < a_3$, ein einschaliges Hyperboloid für $a_3 < y < a_2$ und ein zweischaliges Hyperboloid für $a_2 < y < a_1$ (für $a_1 < y$ ergeben sich nullteilige Flächen). Für einen festen Punkt $x_i$ gibt die in $y$ kubische Gleichung (51) je drei stets reelle Lösungen $y_i$, von denen je eine in jedem der oben angegebenen Intervalle liegt und die als *elliptische* oder *Laméсche Koordinaten* des Punktes be-

zeichnet werden. Umgekehrt erhält man die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes aus den elliptischen durch die Formeln

$$x_1^2 = \frac{(a_1 - y_1)(a_1 - y_2)(a_1 - y_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}, \quad x_2^2 = \frac{(a_2 - y_1)(a_2 - y_2)(a_2 - y_3)}{(a_2 - a_3)(a_2 - a_1)},$$

$$x_3^2 = \frac{(a_3 - y_1)(a_3 - y_2)(a_3 - y_3)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}.$$

Es ergeben sich also acht Punkte, deren Koordinaten sich nur durch die Vorzeichen unterscheiden, von denen also jeder in je einem Oktanten, symmetrisch zu den Koordinatenebenen $x_i = 0$ liegt.

Die Orthogonalität des Systems (51) ist leicht nachzuweisen. Sei

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i - \bar{y}} = 1 \tag{52}$$

mit $\bar{y} \neq y$ eine zweite Fläche der Schar. Durch Subtraktion der Gleichung (52) von (51) folgt

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{(a_i - y)(a_i - \bar{y})} = 0,$$

was aber gerade die Orthogonalitätsbedingung der Flächen (52) und (51) ist, da $\frac{x_i}{a_i - y}$ bzw. $\frac{x_i}{a_i - \bar{y}}$ (nicht summieren über $i$) die Normalenvektoren dieser beiden Flächen sind.

*Die Krümmungslinien der Flächen zweiten Grades sind also im allgemeinen Raumkurven vierter Ordnung.*

**D. Aufgaben.**

1. Man untersuche die Fläche, die von den Krümmungskreisen der Normalschnitte eines Punktes beschrieben wird.

2. Man bestimme die Hauptkrümmungen der Tangentenfläche einer Raumkurve.

3. *(Eine Dualisierung des Satzes von Meusnier.)* Als *Krümmungskegel* einer Torse bezeichnet man einen Drehkegel, der die Torse in allen Punkten einer Erzeugenden von zweiter Ordnung berührt; er ist dual zum Krümmungskreis einer Kurve. Wir betrachten die sämtlichen Kegel, die einer Fläche umschrieben sind (deren Erzeugende also durchweg Flächentangenten sind) und deren Scheitel auf einer festen Flächentangente $t$ liegen, deren Berührungspunkt $P$ kein parabolischer Punkt ist. Die zur Erzeugenden $t$ gehörigen Krümmungskegel aller dieser Kegel umhüllen dann eine Kugel, die die gegebene Fläche in $P$ berührt.[1])

1) Vgl. B. Hostinský, Nouv. Ann. de math. (4), 9 (1909), S. 399—403 und E. Müller, Wiener Berichte 1917, S. 311—318.

4. Sind $R_1$ und $R_2$ die Normalkrümmungen eines Flächenpunktes $P$ in zwei aufeinander senkrechten Richtungen, $'R$ und $''R$ wie immer die Hauptkrümmungen in $P$, so ist

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{'R}+\frac{1}{''R}.$$

5. Unter einer *Gesimsfläche* versteht man jede Orthogonalfläche einer einparametrigen Ebenenschar. Man kann diese Flächen kinematisch so erzeugen, daß man eine Ebene mit einer in ihr gezeichneten Kurve $C$ an der Hüllfläche der Schar abrollen läßt. $C$ beschreibt dann eine Gesimsfläche. Ist die erwähnte Schar die der Tangentenebenen eines Zylinders, so spricht man von *Gesimsflächen mit zylindrischer Abwicklung*. Man bestimme die Krümmungslinien einer Gesimsfläche.

6. Man bestimme die Nabelpunkte der Flächen $x_1 x_2 x_3 = a^3$ und $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3a^3$.

7. Darstellung der Flächen zweiten Grades in Asymptotenparametern.

8. Jede ebene geodätische Linie einer Fläche ist auch Krümmungslinie, aber nicht umgekehrt (z. B. die Parallelkreise einer Drehfläche).

9. Man beweise den Satz von KOENIGS: Die zu den Schnitten einer Fläche mit den Ebenen eines Büschels konjugierte Schar besteht aus den Berührungskurven (Örtern der Berührungspunkte) jener der Fläche umschriebenen Kegel, deren Scheitel auf der Achse des Ebenenbüschels liegen. Anwendung auf die Krümmungslinien von Zylindern.

10. Man beweise den Satz von BELTRAMI: Die Krümmung einer Asymptotenlinie in einem Punkt $P$ verhält sich zur Krümmung des die Asymptotenlinie berührenden Schnittes der Fläche mit der Tangentenebene in $P$ wie $3:2$.

11. Zwei Flächenrichtungen sind konjugiert, wenn eine auf dem sphärischen Bild der anderen senkrecht steht und umgekehrt.

12. Man bestimme die Drehflächen konstanter mittlerer Krümmung.

13. Der Ort der parabolischen Punkte einer Fläche (am einfachsten in der Form $z = f(x, y)$ anzunehmen) ist entweder der Ort der Spitzen der Asymptotenlinien oder die Hüllkurve derselben.

# V. Die Ableitungsgleichungen und das Formenproblem.

## § 1. Die absolute Differentiation.

Die folgenden Überlegungen gehören durchaus dem Problemkreis der Geometrie in einem RIEMANNschen $R_2$, oder mit anderen Worten, der Geometrie auf der Fläche an. Der Maßtensor $g_{\alpha\beta}$ sei mindestens einmal nach den Koordinaten $u_\alpha$ auf der Fläche stetig differenzierbar.[1])

Es sei längs der stetig differenzierbaren Flächenkurve $u_\alpha(t)$ ein stetig differenzierbarer kontravarianter Vektor $\lambda^\alpha(t)$ gegeben. Bei einer zulässigen Transformation $u_\alpha = u_\alpha(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ transformieren sich die $\lambda^\alpha(t)$ nach dem Gesetz (III, 3, 11)

$$\lambda^\alpha = \frac{\partial u_\alpha}{\partial \bar{u}_\beta} \bar{\lambda}^\beta. \tag{1}$$

Für die Ableitung des Vektors folgt durch Differentiation

$$\frac{d\lambda^\alpha}{dt} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial \bar{u}_\beta} \frac{d\bar{\lambda}^\beta}{dt} + \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \bar{u}_\beta \partial \bar{u}_\gamma} \frac{d\bar{u}_\gamma}{dt} \bar{\lambda}^\beta. \tag{2}$$

Man erkennt, daß *die Ableitungen eines Vektors keine Vektoren sind.*

Um die Bedeutung dieser Tatsache richtig würdigen zu können, erinnere man sich an unsere bisherigen Untersuchungen, wo wir von der geradezu selbstverständlichen Tatsache, daß die Ableitungen von Vektoren des euklidischen Raumes immer wieder Vektoren sind, ausgiebigsten Gebrauch gemacht haben. Dasselbe gilt allgemeiner auch von den Tensoren des euklidischen Raumes. Sind die Komponenten eines Tensors stetig differenzierbare Funktionen der Koordinaten, so ergibt sich im euklidischen Raume durch Differentiation nach einer Koordinate ein Tensor, dessen Stufenzahl um eins größer ist als die des ursprünglichen, was man leicht durch Differentiation der Transformationsformeln (I, 4, 27) unter Benützung der Relation $\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k} = a_{ik}$ nachweist. Ist dagegen, um ein typisches Beispiel zu nehmen, $A_{\mu}^{\cdot\nu}$ ein stetig diffe-

1) Die im folgenden entwickelten Formeln gelten ganz allgemein für beliebige Dimensionszahlen. Eine ausführliche, von anderen Gesichtspunkten ausgehende Einführung der absoluten Differentiation für beliebige Dimensionszahl findet der Leser im zweiten Band.

renzierbarer gemischter Tensor zweiter Stufe auf der Fläche, so folgt aus seinen Transformationsformeln

$$A_{\mu}^{\cdot\nu} = \frac{\partial \bar{u}_{\varrho}}{\partial u_{\mu}} \frac{\partial u_{\nu}}{\partial \bar{u}_{\sigma}} \bar{A}_{\varrho}^{\cdot\sigma} \tag{3}$$

durch Differentiation nach $u_{\tau}$

$$\frac{\partial A_{\mu}^{\cdot\nu}}{\partial u_{\tau}} = \frac{\partial^2 \bar{u}_{\varrho}}{\partial u_{\mu} \partial u_{\tau}} \frac{\partial u_{\nu}}{\partial \bar{u}_{\sigma}} \bar{A}_{\varrho}^{\cdot\sigma} + \frac{\partial \bar{u}_{\varrho}}{\partial u_{\mu}} \frac{\partial^2 u_{\nu}}{\partial \bar{u}_{\sigma} \partial \bar{u}_{\omega}} \frac{\partial \bar{u}_{\omega}}{\partial u_{\tau}} \bar{A}_{\varrho}^{\cdot\sigma} + \frac{\partial \bar{u}_{\varrho}}{\partial u_{\mu}} \frac{\partial u_{\nu}}{\partial \bar{u}_{\sigma}} \frac{\partial \bar{u}_{\omega}}{\partial u_{\tau}} \frac{\partial \bar{A}_{\varrho}^{\cdot\sigma}}{\partial \bar{u}_{\omega}}. \tag{4}$$

Aus (2) und (4) erkennt man, daß die störenden Glieder zweite Ableitungen der Koordinaten enthalten und somit wegfielen, wenn man sich auf lineare Koordinatentransformationen beschränkte. Also selbst im euklidischen Raum wird $\frac{\partial A_{\mu}^{\cdot\nu}}{\partial u_{\tau}}$ nur dann ein Tensor sein, wenn man sich auf lineare, oder spezieller orthogonale Koordinatentransformationen beschränkt, aber schon z. B. beim Übergang zu Polarkoordinaten wird das nicht mehr der Fall sein.

Es wird also von größter Bedeutung sein, wenn es uns gelingt, den Begriff der Ableitung und des Differentials von Flächentensoren so zu verallgemeinern, daß erstens für diese verallgemeinerte Differentiation die allgemeinen Regeln für die Ableitung von Summe und Produkt gelten, daß zweitens stets wieder Tensoren entstehen und daß sie drittens in die gewöhnliche Differentiation übergeht, wenn der Maßtensor die euklidische Form $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ hat. Diese verallgemeinerte Differentiation werden wir als *absolute Differentiation* bezeichnen. Die Relation (4) legt nahe, die absolute Ableitung durch Einführung von Zusatzgliedern zu definieren, die in den Tensorkomponenten linear sind und ein Transformationsgesetz besitzen, in dem ebenfalls die zweiten Ableitungen der Koordinaten auftreten (um deren Elimination es sich ja gerade handelt), und zwar so, daß sie die in (4) vorkommenden dritten Ableitungen der Koordinaten gerade aufheben. Nach der dritten obigen Forderung dürfen diese Zusatzglieder nur vom Maßtensor abhängen. Es liegt nahe, vom Transformationsgesetz

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{u}_{\gamma}}{\partial u_{\alpha}} \frac{\partial \bar{u}_{\delta}}{\partial u_{\beta}} \bar{g}_{\gamma\delta} \tag{5}$$

des Maßtensors auszugehen. Bei Differentiation von (5) treten wieder die zweiten Ableitungen der Koordinaten auf; lassen sich diese dann daraus und aus (4) eliminieren, so sind wir am Ziel, denn für $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ sind die Ableitungen des Maßtensors Null, die Zusatzglieder fallen weg und es bleibt das Transformationsgesetz eines Tensors dritter Stufe, das aus (4) durch Tilgung der beiden ersten Glieder auf der rechten Seite entsteht. Der durch die Differentiation neu hinzukommende Index ist dann offenbar ein kovarianter,

so daß man auch von einer *kovarianten Ableitung* spricht. Wir gehen nun an die vielleicht etwas umständliche, aber nicht zu vermeidende Rechnung.

Durch Differentiation von (5) folgt

$$(6)\qquad \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u_\varkappa} = \frac{\partial^2 \bar u_\gamma}{\partial u_\alpha \partial u_\varkappa}\frac{\partial \bar u_\delta}{\partial u_\beta}\bar g_{\gamma\delta} + \frac{\partial \bar u_\gamma}{\partial u_\alpha}\frac{\partial^2 \bar u_\delta}{\partial u_\beta \partial u_\varkappa}\bar g_{\gamma\delta} + \frac{\partial \bar u_\gamma}{\partial u_\alpha}\frac{\partial \bar u_\delta}{\partial u_\beta}\frac{\partial \bar u_\lambda}{\partial u_\varkappa}\frac{\partial \bar g_{\gamma\delta}}{\partial \bar u_\lambda}$$

und daraus durch zyklische Vertauschung der Indizes $\alpha$, $\beta$, $\varkappa$

$$(7)\qquad \frac{\partial g_{\beta\varkappa}}{\partial u_\alpha} = \frac{\partial^2 \bar u_\gamma}{\partial u_\beta \partial u_\alpha}\frac{\partial \bar u_\delta}{\partial u_\varkappa}\bar g_{\gamma\delta} + \frac{\partial \bar u_\gamma}{\partial u_\beta}\frac{\partial^2 \bar u_\delta}{\partial u_\varkappa \partial u_\alpha}\bar g_{\gamma\delta} + \frac{\partial \bar u_\delta}{\partial u_\beta}\frac{\partial \bar u_\lambda}{\partial u_\varkappa}\frac{\partial \bar u_\gamma}{\partial u_\alpha}\frac{\partial \bar g_{\delta\lambda}}{\partial \bar u_\gamma}$$

und

$$(8)\qquad \frac{\partial g_{\varkappa\alpha}}{\partial u_\beta} = \frac{\partial^2 \bar u_\gamma}{\partial u_\varkappa \partial u_\beta}\frac{\partial u_\delta}{\partial u_\alpha}\bar g_{\gamma\delta} + \frac{\partial \bar u_\gamma}{\partial u_\varkappa}\frac{\partial^2 \bar u_\delta}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}\bar g_{\gamma\delta} + \frac{\partial \bar u_\lambda}{\partial u_\varkappa}\frac{\partial \bar u_\gamma}{\partial u_\alpha}\frac{\partial \bar u_\delta}{\partial u_\beta}\frac{\partial \bar g_{\lambda\gamma}}{\partial \bar u_\delta}.$$

Im letzten Glied auf der rechten Seite haben wir dabei die Indizes $\gamma$, $\delta$, $\lambda$ ebenfalls zyklisch vertauscht; da sie Summationsindizes sind, ist das natürlich ohne weitere Bedeutung. Wir bilden nun die Summe von (7) und (8) und subtrahieren davon (6). Auf der rechten Seite kürzen sich dabei wegen $\bar g_{\gamma\delta} = \bar g_{\delta\gamma}$ das erste und zweite Glied von (6) gegen das zweite Glied von (7) und das erste von (8), während das erste Glied in (7) mit dem zweiten in (8) übereinstimmt; die letzten Glieder haben das Produkt der drei Ableitungen als gemeinsamen Faktor. Es folgt also

$$(9)\qquad \frac{\partial g_{\beta\varkappa}}{\partial u_\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\varkappa}}{\partial u_\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u_\varkappa}$$
$$= 2\,\frac{\partial \bar u_\gamma}{\partial u_\varkappa}\frac{\partial^2 \bar u_\delta}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}\bar g_{\gamma\delta} + \frac{\partial \bar u_\gamma}{\partial u_\alpha}\frac{\partial \bar u_\delta}{\partial u_\beta}\frac{\partial \bar u_\lambda}{\partial u_\varkappa}\left(\frac{\partial \bar g_{\delta\lambda}}{\partial \bar u_\gamma} + \frac{\partial \bar g_{\gamma\lambda}}{\partial \bar u_\delta} - \frac{\partial \bar g_{\gamma\delta}}{\partial \bar u_\lambda}\right).$$

Wir setzen nun

$$(10)\qquad \frac{\partial g_{\beta\varkappa}}{\partial u_\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\varkappa}}{\partial u_\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u_\varkappa} = 2\begin{bmatrix}\alpha\,\beta\\ \varkappa\end{bmatrix}.$$

Entsprechend bezeichnen wir den eingeklammerten Ausdruck auf der rechten Seite von (9) mit $2\overline{\begin{bmatrix}\gamma\,\delta\\ \lambda\end{bmatrix}}$. Diese immer wieder vorkommenden, nur *von den Ableitungen des Maßtensors* abhängigen Ausdrücke heißen *Christoffelklammern erster Art.* (9) lautet dann

$$(11)\qquad \begin{bmatrix}\alpha\,\beta\\ \varkappa\end{bmatrix} = \frac{\partial \bar u_\gamma}{\partial u_\varkappa}\frac{\partial^2 \bar u_\delta}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}\bar g_{\gamma\delta} + \frac{\partial \bar u_\gamma}{\partial u_\alpha}\frac{\partial \bar u_\delta}{\partial u_\beta}\frac{\partial \bar u_\lambda}{\partial u_\varkappa}\overline{\begin{bmatrix}\gamma\,\delta\\ \lambda\end{bmatrix}}.$$

Diese Relation überschieben wir mit

$$(12)\qquad g^{\varkappa\mu} = \frac{\partial u_\varkappa}{\partial \bar u_\sigma}\frac{\partial u_\mu}{\partial \bar u_\tau}\bar g^{\sigma\tau};$$

die dabei auftretenden Ausdrücke

$$g^{\varkappa\mu}\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \varkappa\end{bmatrix} = \begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \mu\end{Bmatrix} \tag{13}$$

heißen *Christoffelklammern zweiter Art.* Sie hängen vom Maßtensor und seinen Ableitungen ab; da sie in den letzteren homogen sind, verschwinden sie ebenso wie die Klammern erster Art, wenn $g_{\alpha\beta}$ konstant, insbesondere, wenn $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ ist. Es folgt

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \mu\end{Bmatrix} &= \delta^\gamma_\sigma \frac{\partial^2\bar u_\delta}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}\frac{\partial u_\mu}{\partial \bar u_\tau}\bar g_{\gamma\delta}\bar g^{\sigma\tau} + \frac{\partial \bar u_\gamma}{\partial u_\alpha}\frac{\partial \bar u_\delta}{\partial u_\beta}\frac{\partial u_\mu}{\partial \bar u_\tau}\delta^\lambda_\sigma\overline{\begin{bmatrix}\gamma\delta\\ \lambda\end{bmatrix}}\bar g^{\sigma\tau}\\ &= \frac{\partial^2\bar u_\delta}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}\frac{\partial u_\mu}{\partial \bar u_\tau}\bar g_{\sigma\delta}\bar g^{\sigma\tau} + \frac{\partial \bar u_\gamma}{\partial u_\alpha}\frac{\partial \bar u_\delta}{\partial u_\beta}\frac{\partial u_\mu}{\partial \bar u_\tau}\overline{\begin{bmatrix}\gamma\delta\\ \sigma\end{bmatrix}}\bar g^{\sigma\tau}\\ &= \frac{\partial^2\bar u_\tau}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}\frac{\partial u_\mu}{\partial \bar u_\tau} + \frac{\partial \bar u_\gamma}{\partial u_\alpha}\frac{\partial \bar u_\delta}{\partial u_\beta}\frac{\partial u_\mu}{\partial \bar u_\tau}\overline{\begin{Bmatrix}\gamma\delta\\ \tau\end{Bmatrix}}\end{aligned}$$

und daraus durch Überschiebung mit $\dfrac{\partial \bar u_\lambda}{\partial u_\mu}$

$$\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \mu\end{Bmatrix}\frac{\partial \bar u_\lambda}{\partial u_\mu} = \frac{\partial^2\bar u_\tau}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}\delta^\lambda_\tau + \frac{\partial \bar u_\gamma}{\partial u_\alpha}\frac{\partial \bar u_\delta}{\partial u_\beta}\delta^\lambda_\tau\overline{\begin{Bmatrix}\gamma\delta\\ \tau\end{Bmatrix}} = \frac{\partial^2\bar u_\lambda}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} + \frac{\partial \bar u_\gamma}{\partial u_\alpha}\frac{\partial \bar u_\delta}{\partial u_\beta}\overline{\begin{Bmatrix}\gamma\delta\\ \lambda\end{Bmatrix}},$$

also ist bei etwas geänderter Bezeichnung der Indizes

$$\frac{\partial^2\bar u_\varrho}{\partial u_\mu \partial u_\tau} = \begin{Bmatrix}\mu\tau\\ \iota\end{Bmatrix}\frac{\partial \bar u_\varrho}{\partial u_\iota} - \frac{\partial \bar u_\gamma}{\partial u_\mu}\frac{\partial \bar u_\omega}{\partial u_\tau}\overline{\begin{Bmatrix}\gamma\omega\\ \varrho\end{Bmatrix}}; \tag{14}$$

vertauscht man die Größen mit und ohne Querstrich, so ergibt sich noch

$$\frac{\partial^2 u_\nu}{\partial \bar u_\sigma \partial \bar u_\omega} = \overline{\begin{Bmatrix}\sigma\omega\\ \iota\end{Bmatrix}}\frac{\partial u_\nu}{\partial \bar u_\iota} - \frac{\partial u_\gamma}{\partial \bar u_\sigma}\frac{\partial u_\delta}{\partial \bar u_\omega}\begin{Bmatrix}\gamma\delta\\ \nu\end{Bmatrix}. \tag{15}$$

Setzen wir (14) und (15) in (4) ein, so folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_\mu^{\cdot\nu}}{\partial u_\tau} &= \left(\begin{Bmatrix}\mu\tau\\ \iota\end{Bmatrix}\frac{\partial \bar u_\varrho}{\partial u_\iota} - \overline{\begin{Bmatrix}\gamma\omega\\ \varrho\end{Bmatrix}}\frac{\partial \bar u_\gamma}{\partial u_\mu}\frac{\partial \bar u_\omega}{\partial u_\tau}\right)\frac{\partial u_\nu}{\partial \bar u_\sigma}\bar A_\varrho^{\cdot\sigma}\\ &\quad + \left(\overline{\begin{Bmatrix}\sigma\omega\\ \iota\end{Bmatrix}}\frac{\partial u_\nu}{\partial \bar u_\iota} - \begin{Bmatrix}\gamma\delta\\ \nu\end{Bmatrix}\frac{\partial u_\gamma}{\partial \bar u_\sigma}\frac{\partial u_\delta}{\partial \bar u_\omega}\right)\frac{\partial \bar u_\varrho}{\partial u_\mu}\frac{\partial \bar u_\omega}{\partial u_\tau}\bar A_\varrho^{\cdot\sigma} + \frac{\partial \bar u_\varrho}{\partial u_\mu}\frac{\partial \bar u_\omega}{\partial u_\tau}\frac{\partial u_\nu}{\partial \bar u_\sigma}\frac{\partial \bar A_\varrho^{\cdot\sigma}}{\partial \bar u_\omega}\\ &= \begin{Bmatrix}\mu\tau\\ \iota\end{Bmatrix}\frac{\partial \bar u_\varrho}{\partial u_\iota}\frac{\partial u_\nu}{\partial \bar u_\sigma}\bar A_\varrho^{\cdot\sigma} - \begin{Bmatrix}\gamma\delta\\ \nu\end{Bmatrix}\frac{\partial \bar u_\varrho}{\partial u_\mu}\frac{\partial u_\gamma}{\partial \bar u_\sigma}\delta^\delta_\tau\bar A_\varrho^{\cdot\sigma} + \frac{\partial \bar u_\varrho}{\partial u_\mu}\frac{\partial \bar u_\omega}{\partial u_\tau}\frac{\partial u_\nu}{\partial \bar u_\sigma}\frac{\partial \bar A_\varrho^{\cdot\sigma}}{\partial \bar u_\omega}\\ &\quad - \frac{\partial \bar u_\gamma}{\partial u_\mu}\frac{\partial \bar u_\omega}{\partial u_\tau}\frac{\partial u_\nu}{\partial \bar u_\sigma}\overline{\begin{Bmatrix}\gamma\omega\\ \varrho\end{Bmatrix}}\bar A_\varrho^{\cdot\sigma} + \frac{\partial \bar u_\varrho}{\partial u_\mu}\frac{\partial \bar u_\omega}{\partial u_\tau}\frac{\partial u_\nu}{\partial \bar u_\iota}\overline{\begin{Bmatrix}\sigma\omega\\ \iota\end{Bmatrix}}\bar A_\varrho^{\cdot\sigma},\end{aligned}$$

also wegen (3), wenn wir die beiden ersten Glieder von rechts nach links bringen und einige Indizes anders bezeichnen,

$$(16)\quad \frac{\partial A_{\mu}^{\cdot\nu}}{\partial u_{\tau}}-\left\{{\mu\tau \atop \iota}\right\}A_{\iota}^{\cdot\nu}+\left\{{\iota\tau \atop \nu}\right\}A_{\mu}^{\cdot\iota}=\frac{\partial\bar{u}_{\varrho}}{\partial u_{\mu}}\frac{\partial\bar{u}_{\omega}}{\partial u_{\tau}}\frac{\partial u_{\nu}}{\partial\bar{u}_{\sigma}}\left(\frac{\partial\bar{A}_{\varrho}^{\cdot\sigma}}{\partial\bar{u}_{\omega}}-\overline{\left\{{\varrho\,\omega \atop \iota}\right\}}\bar{A}_{\iota}^{\cdot\sigma}+\overline{\left\{{\iota\,\omega \atop \sigma}\right\}}\bar{A}_{\varrho}^{\cdot\iota}\right).$$

Damit sind wir am Ziel. Der Ausdruck linker Hand ist ein Tensor, da (16) genau das Transformationsgesetz eines Tensors dritter Stufe mit zwei kovarianten und einem kontravarianten Index ist. *Wir definieren also als kovariante oder absolute Ableitung eines gemischten Tensors* $A_{\mu}^{\cdot\nu}$ *den Ausdruck*

$$(17)\qquad \frac{\mathfrak{d}A_{\mu}^{\cdot\nu}}{\mathfrak{d}u_{\tau}}=\frac{\partial A_{\mu}^{\cdot\nu}}{\partial u_{\tau}}-\left\{{\mu\tau \atop \iota}\right\}A_{\iota}^{\cdot\nu}+\left\{{\iota\tau \atop \nu}\right\}A_{\mu}^{\cdot\iota}$$

und kommen überein, diese kovarianten Ableitungen stets durch das Symbol $\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}u_{\alpha}}$ zu kennzeichnen. Als *absolutes Differential* bezeichnet man

$$(18)\qquad \mathfrak{d}A_{\mu}^{\cdot\nu}=\frac{\mathfrak{d}A_{\mu}^{\cdot\nu}}{\mathfrak{d}u_{\tau}}du_{\tau}=dA_{\mu}^{\cdot\nu}-\left\{{\mu\tau \atop \iota}\right\}A_{\iota}^{\cdot\nu}du_{\tau}+\left\{{\iota\tau \atop \nu}\right\}A_{\mu}^{\cdot\iota}du_{\tau};$$

es ist $\mathfrak{d}A_{\mu}^{\cdot\nu}$ ein Tensor *derselben* Art wie $A_{\mu}^{\cdot\nu}$.

Wie die Definition der kovarianten Ableitung eines beliebigen Tensors aussieht, ist aus (17) unschwer zu entnehmen; es treten rechts offenbar soviele Zusatzglieder mit Christoffelklammern auf, als der Tensor Indizes hat, und zwar gehört zu jedem kovarianten Index ein Glied mit negativem, zu jedem kontravarianten Index ein Glied mit positivem Vorzeichen. So treten z. B. in der für beliebige kovariante Tensoren zweiter Stufe $A_{\alpha\beta}$ giltigen Formel (6) zwei Glieder vom Typus (14) auf, also wird

$$(19)\qquad \frac{\mathfrak{d}A_{\mu\nu}}{\mathfrak{d}u_{\tau}}=\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial u_{\tau}}-\left\{{\mu\tau \atop \iota}\right\}A_{\iota\nu}-\left\{{\nu\tau \atop \iota}\right\}A_{\mu\iota}.$$

Für einen Skalar $\varphi$ definieren wir

$$(20)\qquad \frac{\mathfrak{d}\varphi}{\mathfrak{d}u_{\tau}}=\frac{\partial\varphi}{\partial u_{\tau}}.$$

Wir schreiben noch die Formeln für kontravariante und kovariante Vektoren an:

$$(21)\qquad \frac{\mathfrak{d}\lambda^{\nu}}{\mathfrak{d}u_{\tau}}=\frac{\partial\lambda^{\nu}}{\partial u_{\tau}}+\left\{{\iota\tau \atop \nu}\right\}\lambda^{\iota},$$

$$(22)\qquad \frac{\mathfrak{d}\lambda_{\mu}}{\mathfrak{d}u_{\tau}}=\frac{\partial\lambda_{\mu}}{\partial u_{\tau}}-\left\{{\mu\tau \atop \iota}\right\}\lambda_{\iota}.$$

Man bestätigt leicht die Giltigkeit der allgemeinen Differentiationsregeln

$$(23)\qquad \mathfrak{d}(A_{\cdots}^{\cdots}+B_{\cdots}^{\cdots})=\mathfrak{d}A_{\cdots}^{\cdots}+\mathfrak{d}B_{\cdots}^{\cdots}$$

für *gleichartige Tensoren* $A_{\cdots}^{\cdots}$ und $B_{\cdots}^{\cdots}$ und

$$(24)\qquad \mathfrak{d}(A_{\cdots}^{\cdots}\cdot B_{\cdots}^{\cdots})=A_{\cdots}^{\cdots}\mathfrak{d}B_{\cdots}^{\cdots}+B_{\cdots}^{\cdots}\mathfrak{d}A_{\cdots}^{\cdots}$$

für beliebige Tensoren; die Punkte deuten dabei Indizes an. Selbstverständlich gilt (24) auch für irgendwelche Überschiebungen von $A^{\cdot\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\cdot}$ und $B^{\cdot\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\cdot}$. Entsprechendes gilt für die absoluten Ableitungen.

Die Christoffelklammern, die wir durch (10) und (13) definierten, sind *keine* Tensoren, doch verhalten sich die Klammern erster Art in bezug auf die Gruppe der linearen (affinen) Transformationen wie ein rein kovarianter, die Klammern zweiter Art wie ein zweifach kovarianter, einfach kontravarianter Tensor dritter Stufe, so daß auch Schreibweisen wie $\Gamma_{\alpha\beta,\varkappa}$ und $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ verwendet werden. Die Klammern erster Art sind, wie aus (10) hervorgeht, in den oberen Indizes symmetrisch, d. h. es gilt

$$\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \varkappa\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta\alpha\\ \varkappa\end{bmatrix}, \tag{25}$$

wegen (13) haben die Klammern zweiter Art dieselbe Eigenschaft:

$$\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \mu\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\beta\alpha\\ \mu\end{Bmatrix}. \tag{26}$$

Durch Überschiebung von (13) mit $g_{\mu\nu}$ ergibt sich die Umkehrung

$$\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \nu\end{bmatrix}=g_{\mu\nu}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \mu\end{Bmatrix}. \tag{27}$$

Wegen der Symmetrie gibt es nur sechs Klammern jeder Art; für die Klammern erster Art erhalten wir aus (10) ausführlich

$$\left\{\begin{aligned}
&\begin{bmatrix}1\,1\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u_1}, &&\begin{bmatrix}1\,2\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}, &&\begin{bmatrix}2\,2\\ 1\end{bmatrix}=\frac{\partial g_{12}}{\partial u_2}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1},\\
&\begin{bmatrix}1\,1\\ 2\end{bmatrix}=\frac{\partial g_{12}}{\partial u_1}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}, &&\begin{bmatrix}1\,2\\ 2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}, &&\begin{bmatrix}2\,2\\ 2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_2};
\end{aligned}\right. \tag{28}$$

die einzelnen Ausdrücke für die $\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \mu\end{Bmatrix}$ sind — wenigstens in allgemeinen Koordinaten — nicht mehr so einfach, daß es sich lohnt, sie ausführlich anzuschreiben.

## § 2. Folgerungen und Anwendungen.

**A.** Für die kovarianten Ableitungen des Maßtensors gilt nach (1, 19) und (1, 27)

$$\frac{\mathfrak{d} g_{\alpha\beta}}{\mathfrak{d} u_\gamma}=\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u_\gamma}-\begin{bmatrix}\alpha\gamma\\ \beta\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\beta\gamma\\ \alpha\end{bmatrix}, \tag{1}$$

führt man hier für die Christoffelklammern ihre Ausdrücke (1, 10) ein, so kürzt sich rechts alles weg, so daß

$$\frac{\mathfrak{d} g_{\alpha\beta}}{\mathfrak{d} u_\gamma}=0 \tag{2}$$

und damit auch

$$\mathfrak{d} g_{\alpha\beta} = 0 \tag{3}$$

ist. Ebenso beweist man, daß

$$\mathfrak{d} \delta_\alpha^\beta = 0 \tag{4}$$

gilt. Ferner erhält man aus $g_{\alpha\gamma} g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\beta$ durch absolute Differentiation wegen (3) ein System linearer Gleichungen

$$g_{\alpha\gamma} \mathfrak{d} g^{\beta\gamma} = 0$$

für die Differentiale $\mathfrak{d} g^{\beta\gamma}$, die wegen $g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 \neq 0$ nur die Lösungen

$$\mathfrak{d} g^{\beta\gamma} = 0 \tag{5}$$

besitzen. Die damit nachgewiesene Tatsache, daß *die absoluten Differentiale — und damit auch die kovarianten Ableitungen — sowohl des kovarianten wie auch des kontravarianten Maßtensors verschwinden,* wird mitunter auch als *Satz von Ricci* bezeichnet. So kann man z. B. (1, 22) aus (1, 21) durch Überschiebung mit $g_{\mu\nu}$ erhalten usw. Aus (1) entnehmen wir noch die auch direkt leicht zu bestätigende Formel

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u_\gamma} = \begin{bmatrix} \alpha\gamma \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta\gamma \\ \alpha \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Ebenso wie die Maßtensoren verhalten sich bei absoluter Differentiation die $\varepsilon$-Tensoren, d. h. es gilt

$$\mathfrak{d} \varepsilon_{\alpha\beta} = 0, \quad \mathfrak{d} \varepsilon^{\alpha\beta} = 0. \tag{7}$$

Der Nachweis, bei dem man zweckmäßig auf die in III, § 4 gegebene Definition der $\varepsilon$-Tensoren zurückgeht, sei dem Leser überlassen.

**B.** Für die Ableitung der Diskriminante $g$ des kovarianten Maßtensors erhält man durch einfache Anwendung der Regeln für die Differentiation von Determinanten den Ausdruck

$$\frac{\partial g}{\partial u_\alpha} = \frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial u_\alpha} g^{\varkappa\lambda} g. \tag{8}$$

(Man beachte, daß $g g^{\varkappa\lambda}$ das algebraische Komplement von $g_{\varkappa\lambda}$ in $g$ ist.) Wegen (6) und (1, 13) folgt weiter

$$\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial u_\alpha} = \left( \begin{bmatrix} \alpha\varkappa \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\lambda \\ \varkappa \end{bmatrix} \right) g^{\varkappa\lambda} = \begin{Bmatrix} \alpha\varkappa \\ \varkappa \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha\lambda \\ \lambda \end{Bmatrix} = 2 \begin{Bmatrix} \alpha\varkappa \\ \varkappa \end{Bmatrix}, \tag{9}$$

was wir auch

$$\frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial u_\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u_\alpha} = \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial u_\alpha} = \begin{Bmatrix} \alpha\varkappa \\ \varkappa \end{Bmatrix} \tag{10}$$

schreiben.

**C.** In III, § 7 hatten wir einigemal den Ausdruck

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial u_\beta}\left(\sqrt{g}\, g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\alpha}\right) \tag{11}$$

zu verwenden. Führen wir die Differentiation nach $u_\beta$ aus, so ergibt sich wegen (10)

$$\Delta\varphi = \begin{Bmatrix}\beta\varkappa\\ \varkappa\end{Bmatrix} g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\alpha} + \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial u_\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\alpha} + g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_\alpha\partial u_\beta}. \tag{12}$$

Nun folgt aus

$$\frac{\mathfrak{d} g^{\alpha\beta}}{\mathfrak{d} u_\gamma} = \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial u_\gamma} + g^{\beta\varkappa}\begin{Bmatrix}\gamma\varkappa\\ \alpha\end{Bmatrix} + g^{\alpha\varkappa}\begin{Bmatrix}\gamma\varkappa\\ \beta\end{Bmatrix} = 0 \tag{13}$$

durch Verjüngung nach $\gamma = \beta$

$$\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial u_\beta} = -\,g^{\beta\varkappa}\begin{Bmatrix}\beta\varkappa\\ \alpha\end{Bmatrix} - g^{\alpha\varkappa}\begin{Bmatrix}\beta\varkappa\\ \beta\end{Bmatrix}, \tag{14}$$

so daß wir für (12)

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \begin{Bmatrix}\beta\varkappa\\ \varkappa\end{Bmatrix} g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\alpha} - \begin{Bmatrix}\beta\varkappa\\ \alpha\end{Bmatrix} g^{\beta\varkappa}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\alpha} - \begin{Bmatrix}\beta\varkappa\\ \beta\end{Bmatrix} g^{\alpha\varkappa}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\alpha} + g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_\alpha\partial u_\beta}\\ &= g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_\alpha\partial u_\beta} - \begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \varkappa\end{Bmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\varkappa}\right)\end{aligned} \tag{15}$$

oder, da der Ausdruck in der Klammer nach (1, 22) nichts anderes ist als die kovariante Ableitung des kovarianten Vektors $\frac{\partial\varphi}{\partial u_\alpha} = \frac{\mathfrak{d}\varphi}{\mathfrak{d} u_\alpha}$,

$$\Delta\varphi = g^{\alpha\beta}\frac{\mathfrak{d}^2\varphi}{\mathfrak{d} u_\alpha \mathfrak{d} u_\beta} \tag{16}$$

erhalten, woraus die Invarianz von $\Delta\varphi$ unmittelbar zu entnehmen ist.[1])

Wir machen bei dieser Gelegenheit darauf aufmerksam, daß die zweiten kovarianten Ableitungen einer Invariante von der Reihenfolge der Differentiationen unabhängig sind, d. h. es gilt

$$\frac{\mathfrak{d}^2\varphi}{\mathfrak{d} u_\alpha \mathfrak{d} u_\beta} = \frac{\mathfrak{d}^2\varphi}{\mathfrak{d} u_\beta \mathfrak{d} u_\alpha}. \tag{17}$$

Für die zweiten kovarianten Ableitungen eines Vektors (oder allgemeiner eines Tensors) gilt diese Vertauschungsregel nicht mehr (§ 3). Für die kovarianten Ableitungen eines *kovarianten* Vektors gilt noch

$$\frac{\mathfrak{d}\lambda_\alpha}{\mathfrak{d} u_\beta} - \frac{\mathfrak{d}\lambda_\beta}{\mathfrak{d} u_\alpha} = \frac{\partial\lambda_\alpha}{\partial u_\beta} - \frac{\partial\lambda_\beta}{\partial u_\alpha}. \tag{18}$$

**D.** Ist unser Riemannscher $R_2$ eine Fläche eines euklidischen Raumes, so ergibt sich aus der Darstellung

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} \tag{19}$$

1) Vgl. die Anmerkung auf S. 113.

des Maßtensors eine einfache Formel für die Christoffelklammern erster Art. In der Tat folgt aus (19) durch Differentiation

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u_\gamma} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_\alpha \partial u_\gamma}\frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} + \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} \tag{20}$$

und daraus durch Einsetzen in (1, 10), da sich rechts vier Glieder wegheben,

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}\frac{\partial x_i}{\partial u_\gamma} = \begin{bmatrix}\alpha\,\beta\\ \gamma\end{bmatrix}. \tag{21}$$

**E.** Es sei durch die beiden Vektoren ${}_{(\varrho)}\lambda$ ein normiertes Zweibein in allen Punkten unserer Fläche gegeben. Die Komponenten der Vektoren seien stetig differenzierbar. Die beiden kovarianten Tensoren zweiter Stufe $\frac{\mathfrak{d}\,{}_{(\varrho)}\lambda_\alpha}{\mathfrak{d}\,u_\beta}$ lassen sich dann nach III, § 4 mittels geeigneter Invarianten ${}_{(\varrho\,\sigma\,\tau)}\lambda$ in dem Zweibein ${}_{(\sigma)}\lambda$ in der Form

$$\frac{\mathfrak{d}\,{}_{(\varrho)}\lambda_\alpha}{\mathfrak{d}\,u_\beta} = {}_{(\varrho\,\sigma\,\tau)}\lambda\;{}_{(\sigma)}\lambda_\alpha\;{}_{(\tau)}\lambda_\beta \tag{22}$$

darstellen. Setzen wir zur Abkürzung

$${}_{(\varrho\,\sigma\,\tau)}\lambda\;{}_{(\tau)}\lambda_\beta = {}_{(\varrho\,\sigma)}C_\beta, \tag{23}$$

so wird (22)

$$\frac{\mathfrak{d}\,{}_{(\varrho)}\lambda_\alpha}{\mathfrak{d}\,u_\beta} = {}_{(\varrho\,\sigma)}C_\beta\;{}_{(\sigma)}\lambda_\alpha \tag{24}$$

und analog ergibt sich durch Überschiebung mit $g^{\alpha\gamma}$ wegen (2)

$$\frac{\mathfrak{d}\,{}_{(\varrho)}\lambda^\gamma}{\mathfrak{d}\,u_\beta} = {}_{(\varrho\,\sigma)}C_\beta\;{}_{(\sigma)}\lambda^\gamma. \tag{25}$$

Aus ${}_{(\varrho)}\lambda_\alpha\;{}_{(\sigma)}\lambda^\alpha = \delta_{\varrho\sigma}$ folgt durch kovariante Ableitung

$${}_{(\varrho)}\lambda_\alpha \frac{\mathfrak{d}\,{}_{(\sigma)}\lambda^\alpha}{\mathfrak{d}\,u_\beta} + \frac{\mathfrak{d}\,{}_{(\varrho)}\lambda_\alpha}{\mathfrak{d}\,u_\beta}\,{}_{(\sigma)}\lambda^\alpha = 0 \tag{26}$$

oder, wegen (24) und (25),

$${}_{(\varrho)}\lambda_\alpha\;{}_{(\sigma\tau)}C_\beta\;{}_{(\tau)}\lambda^\alpha + {}_{(\varrho\tau)}C_\beta\;{}_{(\tau)}\lambda_\alpha\;{}_{(\sigma)}\lambda^\alpha = {}_{(\sigma\tau)}C_\beta\,\delta_{\varrho\tau} + {}_{(\varrho\tau)}C_\beta\,\delta_{\sigma\tau} = 0,$$

d. h.

$${}_{(\sigma\varrho)}C_\beta = -\,{}_{(\varrho\sigma)}C_\beta. \tag{27}$$

Aus der Darstellung

$$\xi^\alpha = {}_{(\varrho)}\xi\;{}_{(\varrho)}\lambda^\alpha \tag{28}$$

der kontravarianten Komponenten eines stetig differenzierbaren Vektors in unserem Zweibein folgt durch absolute Differentiation

$$\mathfrak{d}\,\xi^\alpha = (d\,{}_{(\varrho)}\xi + {}_{(\sigma)}\xi\;{}_{(\sigma\varrho)}C_\beta\,du_\beta)\;{}_{(\varrho)}\lambda^\alpha \tag{29}$$

und daraus durch Überschiebung mit $g_{\alpha\gamma}$

$$\mathfrak{d}\,\xi_\gamma = (d\,{}_{(\varrho)}\xi + {}_{(\sigma)}\xi\;{}_{(\sigma\varrho)}C_\beta\,du_\beta)\;{}_{(\varrho)}\lambda_\gamma. \tag{30}$$

## § 3. Der Krümmungstensor.

Wir knüpfen an die Bemerkung am Schluß von § 2 C an und zeigen, daß die zweiten kovarianten Ableitungen eines Vektors von der Reihenfolge der Differentiationen im allgemeinen ganz wesentlich abhängen. Es sei $\xi$ ein in allen Punkten der Fläche definierter Vektor, dessen (kovariante oder kontravariante) Komponenten ebenso wie die $g_{\alpha\beta}$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen der $u_\alpha$ sind. Aus

$$(1) \qquad \frac{\mathfrak{d}\xi_\varkappa}{\mathfrak{d}u_\lambda} = \frac{\partial \xi_\varkappa}{\partial u_\lambda} - \left\{ {\varkappa\lambda \atop \gamma} \right\} \xi_\gamma = p_{\varkappa\lambda}$$

folgt durch nochmalige Differentiation (man beachte die Reihenfolge)

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{\mathfrak{d}^2\xi_\varkappa}{\mathfrak{d}u_\mu\,\mathfrak{d}u_\lambda} = \frac{\mathfrak{d}p_{\varkappa\lambda}}{\mathfrak{d}u_\mu} &= \frac{\partial p_{\varkappa\lambda}}{\partial u_\mu} - \left\{ {\varkappa\mu \atop \beta} \right\} p_{\beta\lambda} - \left\{ {\lambda\mu \atop \beta} \right\} p_{\varkappa\beta} \\ &= \frac{\partial^2 \xi_\varkappa}{\partial u_\lambda \partial u_\mu} - \frac{\partial}{\partial u_\mu}\left\{ {\varkappa\lambda \atop \gamma} \right\} \xi_\gamma - \left\{ {\varkappa\lambda \atop \gamma} \right\} \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial u_\mu} - \left\{ {\varkappa\mu \atop \beta} \right\} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial u_\lambda} \\ &\quad + \left\{ {\varkappa\mu \atop \beta} \right\}\left\{ {\beta\lambda \atop \gamma} \right\} \xi_\gamma - \left\{ {\lambda\mu \atop \beta} \right\} \frac{\partial \xi_\varkappa}{\partial u_\beta} + \left\{ {\lambda\mu \atop \beta} \right\}\left\{ {\varkappa\beta \atop \gamma} \right\} \xi_\gamma \end{aligned}$$

und daraus durch Vertauschung von $\lambda$ und $\mu$

$$(3) \qquad \begin{aligned} \frac{\mathfrak{d}^2\xi_\varkappa}{\mathfrak{d}u_\lambda\,\mathfrak{d}u_\mu} &= \frac{\partial^2 \xi_\varkappa}{\partial u_\lambda \partial u_\mu} - \frac{\partial}{\partial u_\lambda}\left\{ {\varkappa\mu \atop \gamma} \right\} \xi_\gamma - \left\{ {\varkappa\mu \atop \gamma} \right\} \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial u_\lambda} - \left\{ {\varkappa\lambda \atop \beta} \right\} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial u_\mu} \\ &\quad + \left\{ {\varkappa\lambda \atop \beta} \right\}\left\{ {\beta\mu \atop \gamma} \right\} \xi_\gamma - \left\{ {\lambda\mu \atop \beta} \right\} \frac{\partial \xi_\varkappa}{\partial u_\beta} + \left\{ {\lambda\mu \atop \beta} \right\}\left\{ {\varkappa\beta \atop \gamma} \right\} \xi_\gamma, \end{aligned}$$

so daß die Differenz

$$(4) \quad \frac{\mathfrak{d}^2\xi_\varkappa}{\mathfrak{d}u_\mu\,\mathfrak{d}u_\lambda} - \frac{\mathfrak{d}^2\xi_\varkappa}{\mathfrak{d}u_\lambda\,\mathfrak{d}u_\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial u_\lambda}\left\{ {\varkappa\mu \atop \gamma} \right\} - \frac{\partial}{\partial u_\mu}\left\{ {\varkappa\lambda \atop \gamma} \right\} + \left\{ {\varkappa\mu \atop \beta} \right\}\left\{ {\beta\lambda \atop \gamma} \right\} - \left\{ {\varkappa\lambda \atop \beta} \right\}\left\{ {\beta\mu \atop \gamma} \right\} \right) \xi_\gamma$$

wird. Wir setzen

$$(5) \qquad R^{\gamma}_{\cdot\varkappa\lambda\mu} = \frac{\partial}{\partial u_\lambda}\left\{ {\varkappa\mu \atop \gamma} \right\} - \frac{\partial}{\partial u_\mu}\left\{ {\varkappa\lambda \atop \gamma} \right\} + \left\{ {\varkappa\mu \atop \beta} \right\}\left\{ {\beta\lambda \atop \gamma} \right\} - \left\{ {\varkappa\lambda \atop \beta} \right\}\left\{ {\beta\mu \atop \gamma} \right\};$$

dieser dreifach kovariante, einfach kontravariante Tensor[1]) vierter Stufe heißt *gemischter (Riemannscher) Krümmungstensor.* (4) wird dann

$$(6) \qquad \frac{\mathfrak{d}^2\xi_\varkappa}{\mathfrak{d}u_\mu\,\mathfrak{d}u_\lambda} - \frac{\mathfrak{d}^2\xi_\varkappa}{\mathfrak{d}u_\lambda\,\mathfrak{d}u_\mu} = R^{\gamma}_{\cdot\varkappa\lambda\mu}\,\xi_\gamma.$$

---

1) Der Tensorcharakter folgt aus der für jeden Vektor $\xi_\gamma$ gültigen Relation (6).

Der gemischte Krümmungstensor ist, wie aus der Definition unmittelbar entnommen werden kann, in den beiden letzten Indizes alternierend, d. h. es gilt[1])

$$R^{\gamma}_{.\varkappa\lambda\mu} = - R^{\gamma}_{.\varkappa\mu\lambda}. \tag{7}$$

Durch Überschiebung von (5) mit $g_{\gamma\iota}$ ergibt sich der *(rein) kovariante (Riemannsche) Krümmungstensor*

$$R_{\iota\varkappa\lambda\mu} = g_{\gamma\iota} R^{\gamma}_{.\varkappa\lambda\mu}, \tag{8}$$

oder ausführlicher

$$R_{\iota\varkappa\lambda\mu} = g_{\gamma\iota}\frac{\partial}{\partial u_\lambda}\begin{Bmatrix}\varkappa\mu\\ \gamma\end{Bmatrix} - g_{\gamma\iota}\frac{\partial}{\partial u_\mu}\begin{Bmatrix}\varkappa\lambda\\ \gamma\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\varkappa\mu\\ \beta\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}\beta\lambda\\ \iota\end{bmatrix} - \begin{Bmatrix}\varkappa\lambda\\ \beta\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}\beta\mu\\ \iota\end{bmatrix}. \tag{9}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} g_{\gamma\iota}\frac{\partial}{\partial u_\lambda}\begin{Bmatrix}\varkappa\mu\\ \gamma\end{Bmatrix} &= \frac{\partial}{\partial u_\lambda}\left(g_{\gamma\iota}\begin{Bmatrix}\varkappa\mu\\ \gamma\end{Bmatrix}\right) - \frac{\partial g_{\gamma\iota}}{\partial u_\lambda}\begin{Bmatrix}\varkappa\mu\\ \gamma\end{Bmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial u_\lambda}\begin{bmatrix}\varkappa\mu\\ \iota\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\gamma\lambda\\ \iota\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varkappa\mu\\ \gamma\end{Bmatrix} - \begin{bmatrix}\iota\lambda\\ \gamma\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varkappa\mu\\ \gamma\end{Bmatrix}. \end{aligned} \tag{10}$$

Setzen wir diese und die durch Vertauschung von $\lambda$ und $\mu$ sich ergebende Formel in (9) ein, so fallen vier Glieder weg und es bleibt

$$R_{\iota\varkappa\lambda\mu} = \frac{\partial}{\partial u_\lambda}\begin{bmatrix}\varkappa\mu\\ \iota\end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial u_\mu}\begin{bmatrix}\varkappa\lambda\\ \iota\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\iota\mu\\ \beta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varkappa\lambda\\ \beta\end{Bmatrix} - \begin{bmatrix}\iota\lambda\\ \beta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varkappa\mu\\ \beta\end{Bmatrix}, \tag{11}$$

oder, wenn wir in den beiden ersten Gliedern die Christoffelklammern durch ihre Ausdrücke (1, 10) und (1, 13) ersetzen und die Differentiationen ausführen,

$$\begin{aligned} R_{\iota\varkappa\lambda\mu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\iota\mu}}{\partial u_\varkappa \partial u_\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\varkappa\mu}}{\partial u_\iota \partial u_\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\iota\lambda}}{\partial u_\varkappa \partial u_\mu} + \frac{\partial^2 g_{\varkappa\lambda}}{\partial u_\iota \partial u_\mu}\right) \\ + g^{\alpha\beta}\left(\begin{bmatrix}\varkappa\lambda\\ \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\iota\mu\\ \beta\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\varkappa\mu\\ \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\iota\lambda\\ \beta\end{bmatrix}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Aus dieser Darstellung ist eine wichtige Symmetrieeigenschaft der $R_{\iota\varkappa\lambda\mu}$ unmittelbar zu entnehmen, nämlich

$$R_{\iota\varkappa\lambda\mu} = R_{\lambda\mu\iota\varkappa}, \tag{13}$$

während die schiefe Symmetrie der $R^{\gamma}{}_{\varkappa\lambda\mu}$ wegen (8) erhalten bleibt:

$$R_{\iota\varkappa\lambda\mu} = - R_{\iota\varkappa\mu\lambda}. \tag{14}$$

Aus (13) und (14) folgt, daß auch

$$R_{\iota\varkappa\lambda\mu} = - R_{\varkappa\iota\lambda\mu} \tag{15}$$

gilt. Von den $2^4 = 16$ Komponenten $R_{\iota\varkappa\lambda\mu}$ sind wegen (14) und (15) nur jene von Null verschieden, bei denen sowohl $\iota \neq \varkappa$ als auch $\lambda \neq \mu$ ist; da für

1) Wir geben hier nur die für das folgende wichtigen Eigenschaften der Krümmungstensoren an. Eine ausführlichere Behandlung erfolgt im zweiten Band, Abschnitt VI.

alle Indizes nur die Werte 1 und 2 in Betracht kommen, gibt es nur vier von Null verschiedene, untereinander bis auf das Vorzeichen gleiche Komponenten

$$R_{1212} = -R_{1221} = -R_{2112} = R_{2121}. \tag{16}$$

Es sei gleich bei dieser Gelegenheit bemerkt, daß die Invariante[1]) $\varepsilon^{\iota\varkappa}\varepsilon^{\lambda\mu}R_{\iota\varkappa\lambda\mu}$ wegen (16) und wegen der schiefen Symmetrie der $\varepsilon$-Tensoren den Wert

$$\varepsilon^{\iota\varkappa}\varepsilon^{\lambda\mu}R_{\iota\varkappa\lambda\mu} = \frac{4}{g}R_{1212} \tag{17}$$

hat, wo $g$ wie gewöhnlich die Diskriminante des Maßtensors ist. Auf die ganz fundamentale Bedeutung dieser Invariante werden wir im folgenden Paragraphen ausführlicher zurückkommen.

Wir verschaffen uns noch eine zu (6) analoge Formel für die zweiten kovarianten Ableitungen eines kontravarianten Vektors.

Wegen $\frac{\mathfrak{d} g^{\varkappa\nu}}{\mathfrak{d} u_\lambda} = 0$ ist $g^{\varkappa\nu}\frac{\mathfrak{d}^2 \xi_\varkappa}{\mathfrak{d} u_\mu \mathfrak{d} u_\lambda} = \frac{\mathfrak{d}^2 g^{\varkappa\nu}\xi_\varkappa}{\mathfrak{d} u_\mu \mathfrak{d} u_\lambda} = \frac{\mathfrak{d}^2 \xi^\nu}{\mathfrak{d} u_\mu \mathfrak{d} u_\lambda}$, so daß wir uns die gesuchte Formel durch Überschiebung von (6) mit $g^{\varkappa\nu}$ verschaffen können. Auf der rechten Seite ergibt sich wegen (15) und (8)

$$g^{\varkappa\nu}R^{\gamma}_{\cdot\varkappa\lambda\mu}\xi_\gamma = g^{\varkappa\nu}g_{\alpha\gamma}R^{\gamma}_{\cdot\varkappa\lambda\mu}\xi^\alpha = g^{\varkappa\nu}R_{\alpha\varkappa\lambda\mu}\xi^\alpha = -g^{\varkappa\nu}R_{\varkappa\alpha\lambda\mu}\xi^\alpha = -R^{\nu}_{\cdot\alpha\lambda\mu}\xi^\alpha,$$

so daß endgiltig

$$\frac{\mathfrak{d}^2 \xi^\nu}{\mathfrak{d} u_\mu \mathfrak{d} u_\lambda} - \frac{\mathfrak{d}^2 \xi^\nu}{\mathfrak{d} u_\lambda \mathfrak{d} u_\mu} = -R^{\nu}_{\cdot\alpha\lambda\mu}\xi^\alpha \tag{18}$$

wird.

Wie jeder Tensor läßt sich auch der Krümmungstensor mittels gewisser Invarianten in einem normierten Zweibein darstellen. Diese Invarianten lassen sich aber einfach durch die in § 2 E eingeführten kovarianten Vektoren ${}_{(\varrho\sigma)}C_\beta$ und ihre Ableitungen ausdrücken. Die Vektoren des Zweibeins seien dabei zweimal stetig differenzierbar. Aus (2, 24) folgt dann

$$\begin{aligned}\frac{\mathfrak{d}^2\,{}_{(\varrho)}\lambda_\varkappa}{\mathfrak{d} u_\mu \mathfrak{d} u_\lambda} &= \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d} u_\mu}\left({}_{(\varrho\sigma)}C_\lambda\,{}_{(\sigma)}\lambda_\varkappa\right) = \frac{\mathfrak{d}\,{}_{(\varrho\sigma)}C_\lambda}{\mathfrak{d} u_\mu}\,{}_{(\sigma)}\lambda_\varkappa + {}_{(\varrho\omega)}C_\lambda\frac{\mathfrak{d}\,{}_{(\omega)}\lambda_\varkappa}{\mathfrak{d} u_\mu}\\ &= \left(\frac{\mathfrak{d}\,{}_{(\varrho\sigma)}C_\lambda}{\mathfrak{d} u_\mu} + {}_{(\varrho\omega)}C_\lambda\,{}_{(\omega\sigma)}C_\mu\right){}_{(\sigma)}\lambda_\varkappa,\end{aligned} \tag{19}$$

so daß wegen (2, 18)

$$\frac{\mathfrak{d}^2\,{}_{(\varrho)}\lambda_\varkappa}{\mathfrak{d} u_\mu \mathfrak{d} u_\lambda} - \frac{\mathfrak{d}^2\,{}_{(\varrho)}\lambda_\varkappa}{\mathfrak{d} u_\lambda \mathfrak{d} u_\mu} = \left(\frac{\partial\,{}_{(\varrho\sigma)}C_\lambda}{\partial u_\mu} - \frac{\partial\,{}_{(\varrho\sigma)}C_\mu}{\partial u_\lambda} + {}_{(\varrho\omega)}C_\lambda\,{}_{(\omega\sigma)}C_\mu - {}_{(\varrho\omega)}C_\mu\,{}_{(\omega\sigma)}C_\lambda\right){}_{(\sigma)}\lambda_\varkappa \tag{20}$$

---

1) Es handelt sich um eine Überschiebung von Tensoren! Die ähnlich gebildeten Invarianten $\varepsilon^{\iota\lambda}\varepsilon^{\varkappa\mu}R_{\iota\varkappa\lambda\mu}$ und $\varepsilon^{\iota\mu}\varepsilon^{\varkappa\lambda}R_{\iota\varkappa\lambda\mu}$ sind gleich der halben bzw. gleich der negativen halben im Text betrachteten Invariante.

folgt. Setzen wir zur Abkürzung

$$(21)\qquad \frac{\partial\,{}_{(\varrho\sigma)}C_\lambda}{\partial u_\mu} - \frac{\partial\,{}_{(\varrho\sigma)}C_\mu}{\partial u_\lambda} + {}_{(\varrho\omega)}C_{\lambda\,(\omega\sigma)}C_\mu - {}_{(\varrho\omega)}C_{\mu\,(\omega\sigma)}C_\lambda = {}_{(\varrho\sigma)}Y_{\lambda\mu},$$

so ergibt sich aus (6) $\quad R^{\gamma}_{\cdot\varkappa\lambda\mu\,(\varrho)}\lambda_\gamma = {}_{(\varrho\sigma)}Y_{\lambda\mu\,(\sigma)}\lambda_\varkappa$

und daraus weiter durch Überschiebung mit ${}_{(\varrho)}\lambda_\iota$ wegen $g_{\gamma\iota} = {}_{(\varrho)}\lambda_{\gamma\,(\varrho)}\lambda_\iota$ die gesuchte Darstellung

$$(22)\qquad R_{\iota\varkappa\lambda\mu} = {}_{(\varrho\sigma)}Y_{\lambda\mu\,(\varrho)}\lambda_{\iota\,(\sigma)}\lambda_\varkappa.$$

Die Tensoren ${}_{(\varrho\sigma)}Y_{\lambda\mu}$ haben die Symmetrien

$$(23)\qquad {}_{(\varrho\sigma)}Y_{\mu\lambda} = -{}_{(\varrho\sigma)}Y_{\lambda\mu}, \quad {}_{(\varrho\sigma)}Y_{\lambda\mu} = -{}_{(\sigma\varrho)}Y_{\lambda\mu},$$

wie man aus (21) unmittelbar entnimmt. Insbesondere folgt aus (22)

$$(24)\qquad R_{1212} = {}_{(12)}Y_{12}\,({}_{(1)}\lambda_{1\,(2)}\lambda_2 - {}_{(2)}\lambda_{1\,(1)}\lambda_2).$$

Nun ist aber bei geeigneter Orientierung des Zweibeins ${}_{(\varrho)}\lambda$ nach III, § 4

$$\varepsilon^{\alpha\beta}\,{}_{(1)}\lambda_{\alpha\,(2)}\lambda_\beta = 1, \text{ also } {}_{(1)}\lambda_{1\,(2)}\lambda_2 - {}_{(2)}\lambda_{1\,(1)}\lambda_2 = \sqrt{g} > 0,$$

ferner folgt aus (21) wegen (23)

$${}_{(12)}Y_{12} = \frac{\partial\,{}_{(12)}C_1}{\partial u_2} - \frac{\partial\,{}_{(12)}C_2}{\partial u_1},$$

so daß

$$(25)\qquad R_{1212} = \sqrt{g}\left(\frac{\partial\,{}_{(12)}C_1}{\partial u_2} - \frac{\partial\,{}_{(12)}C_2}{\partial u_1}\right)$$

wird.

## § 4. Die Ableitungsgleichungen und ihre Integrabilitätsbedingungen.

Wir gehen nun wieder von einer in Parameterdarstellung

$$(1)\qquad x_i = x_i(u_1, u_2)$$

gegebenen Fläche des euklidischen Raumes aus. Die drei Funktionen $x_i(u_1, u_2)$ seien dreimal stetig differenzierbar. Durch die drei Vektoren $\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}$, $v_i$ ist in jedem Punkt der Fläche ein Dreibein definiert, das zwar nicht invariant ist gegenüber Parametertransformationen, aber doch zu analogen Überlegungen benützt werden kann wie das begleitende Dreibein einer Raumkurve. Wir stellen zunächst wieder fest, daß sich alle Raumvektoren durch die drei linear unabhängigen Vektoren des Dreibeins linear ausdrücken lassen, was insbesondere von den Ableitungen dieser drei Vektoren selbst gelten muß. Die diesbezüglichen Formeln werden dann als Ableitungsgleichungen bezeichnet. Sie sind, wie schon am Schluß von IV, § 1 hervorgehoben wurde, das

Analogon zu den FRENETschen Formeln der Kurventheorie und von ebenso fundamentaler Bedeutung. Eine erste Gruppe dieser Formeln haben wir a. a. O. abgeleitet, nämlich die sechs *Weingartenschen Gleichungen*

$$\frac{\partial \nu_i}{\partial u_\alpha} = - b_\alpha^\beta \frac{\partial x_i}{\partial u_\beta}, \tag{2}$$

wo $b_\alpha^\beta = g^{\beta\gamma} b_{\alpha\gamma}$ ist, für die Ableitungen des Normalenvektors; wir haben also noch ähnliche Formeln für die Ableitungen der $\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}$, d. h. für die zweiten Ableitungen des Ortsvektors aufzustellen. Nun können wir die $\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}$ aber auch als drei durch Ableitung der parameterinvarianten Funktionen $x_i$ entstandene kovariante Flächenvektoren ansehen und nach § 1 ihre kovarianten Ableitungen

$$\frac{\mathfrak{d}^2 x_i}{\mathfrak{d} u_\beta \mathfrak{d} u_\alpha} = \frac{\mathfrak{d}^2 x_i}{\mathfrak{d} u_\alpha \mathfrak{d} u_\beta} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} - \left\{ {\alpha\beta \atop \varrho} \right\} \frac{\partial x_i}{\partial u_\varrho} \tag{3}$$

bilden, die, auf der Fläche gedeutet, drei kovariante Tensoren zweiter Stufe, oder, im Raum gedeutet, drei[1]) Vektoren sind.

Überschieben wir (3) mit $\frac{\mathfrak{d} x_i}{\mathfrak{d} u_\gamma} = \frac{\partial x_i}{\partial u_\gamma}$, so folgt

$$\frac{\mathfrak{d}^2 x_i}{\mathfrak{d} u_\alpha \mathfrak{d} u_\beta} \frac{\mathfrak{d} x_i}{\mathfrak{d} u_\gamma} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} \frac{\partial x_i}{\partial u_\gamma} - \left\{ {\alpha\beta \atop \varrho} \right\} \frac{\partial x_i}{\partial u_\gamma} \frac{\partial x_i}{\partial u_\varrho}, \tag{4}$$

oder wegen (2, 19) und (2, 21)

$$\frac{\mathfrak{d}^2 x_i}{\mathfrak{d} u_\alpha \mathfrak{d} u_\beta} \frac{\mathfrak{d} x_i}{\mathfrak{d} u_\gamma} = \left[ {\alpha\beta \atop \gamma} \right] - \left\{ {\alpha\beta \atop \varrho} \right\} g_{\gamma\varrho} = \left[ {\alpha\beta \atop \gamma} \right] - \left[ {\alpha\beta \atop \gamma} \right] = 0, \tag{5}$$

d. h., daß die drei Raumvektoren (3) auf beiden Raumvektoren $\frac{\partial x_i}{\partial u_\gamma}$ $(\gamma = 1, 2)$ senkrecht stehen, also in die Richtung der Flächennormalen $\nu_i$ fallen müssen. Wir können also

$$\frac{\mathfrak{d}^2 x_i}{\mathfrak{d} u_\alpha \mathfrak{d} u_\beta} = t_{\alpha\beta} \nu_i \tag{6}$$

setzen und bestimmen den Tensor $t_{\alpha\beta}$ daraus durch Überschiebung mit $\nu_i$; wegen $\nu_i \nu_i = 1$ und (IV, 1, 7) ergibt sich

$$t_{\alpha\beta} = \frac{\mathfrak{d}^2 x_i}{\mathfrak{d} u_\alpha \mathfrak{d} u_\beta} \nu_i = \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} \nu_i - \left\{ {\alpha\beta \atop \varrho} \right\} \frac{\partial x_i}{\partial u_\varrho} \nu_i = b_{\alpha\beta}, \tag{7}$$

so daß (6) endgiltig

$$\frac{\mathfrak{d}^2 x_i}{\mathfrak{d} u_\alpha \mathfrak{d} u_\beta} = b_{\alpha\beta} \nu_i \tag{8}$$

---

1) Da die zweiten kovarianten Ableitungen einer Invariante nach § 2 C von der Reihenfolge der Differentiationen unabhängig sind.

wird. Aus (3) ergeben sich dann die gewöhnlich als *Gaußsche Ableitungsgleichungen* bezeichneten Formeln

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} = \begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \varrho \end{Bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial u_\varrho} + b_{\alpha\beta} v_i. \tag{9}$$

Wir wenden uns nun zu den Integrabilitätsbedingungen der Gleichungen (9), gehen aber dabei wieder von der Form (8) aus. Ersetzen wir in (3, 6) den Flächenvektor $\xi_\varkappa$ durch $\frac{\partial x_i}{\partial u_\varkappa}$, so folgt

$$\left(\frac{\delta^2}{\delta u_\mu \delta u_\lambda} - \frac{\delta^2}{\delta u_\lambda \delta u_\mu}\right) \frac{\partial x_i}{\partial u_\varkappa} = R^{\gamma}_{\cdot\varkappa\lambda\mu} \frac{\partial x_i}{\partial u_\gamma}, \tag{10}$$

während sich aus (8)

$$\left(\frac{\delta^2}{\delta u_\mu \delta u_\lambda} - \frac{\delta^2}{\delta u_\lambda \delta u_\mu}\right) \frac{\partial x_i}{\partial u_\varkappa} = \frac{\delta}{\delta u_\mu}(b_{\varkappa\lambda} v_i) - \frac{\delta}{\delta u_\lambda}(b_{\varkappa\mu} v_i)$$

$$= \left(\frac{\delta b_{\varkappa\lambda}}{\delta u_\mu} - \frac{\delta b_{\varkappa\mu}}{\delta u_\lambda}\right) v_i + b_{\varkappa\lambda} \frac{\partial v_i}{\partial u_\mu} - b_{\varkappa\mu} \frac{\partial v_i}{\partial u_\lambda},$$

oder wegen (2)

$$\left(\frac{\delta^2}{\delta u_\mu \delta u_\lambda} - \frac{\delta^2}{\delta u_\lambda \delta u_\mu}\right) \frac{\partial x_i}{\partial u_\varkappa} = \left(\frac{\delta b_{\varkappa\lambda}}{\delta u_\mu} - \frac{\delta b_{\varkappa\mu}}{\delta u_\lambda}\right) v_i - (b_{\varkappa\lambda} b^{\gamma}_{\mu} - b_{\varkappa\mu} b^{\gamma}_{\lambda}) \frac{\partial x_i}{\partial u_\gamma} \tag{11}$$

ergibt. Durch Überschiebung von (11) mit $v_i$ erhält man wegen (10) die *Gleichungen von Mainardi-Codazzi*

$$\frac{\delta b_{\varkappa\lambda}}{\delta u_\mu} = \frac{\delta b_{\varkappa\mu}}{\delta u_\lambda}, \tag{12}$$

oder ausführlicher

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial b_{11}}{\partial u_2} - b_{11} \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} - b_{12} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} &= \frac{\partial b_{12}}{\partial u_1} - b_{12} \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} - b_{22} \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}, \\ \frac{\partial b_{12}}{\partial u_2} - b_{11} \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} - b_{12} \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} &= \frac{\partial b_{22}}{\partial u_1} - b_{12} \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} - b_{22} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}; \end{aligned}\right. \tag{13}$$

während durch Elimination der dritten Ableitungen aus (10) und (11) unter Berücksichtigung von (12)

$$R^{\gamma}_{\cdot\varkappa\lambda\mu} \frac{\partial x_i}{\partial u_\gamma} = (b^{\gamma}_{\lambda} b_{\varkappa\mu} - b^{\gamma}_{\mu} b_{\varkappa\lambda}) \frac{\partial x_i}{\partial u_\gamma} \tag{14}$$

folgt. Durch Überschiebung mit $\frac{\partial x_i}{\partial u_\iota}$ folgt daraus wegen $\frac{\partial x_i}{\partial u_\gamma} \frac{\partial x_i}{\partial u_\iota} = g_{\gamma\iota}$ die Relation

$$R_{\iota\varkappa\lambda\mu} = b_{\iota\lambda} b_{\varkappa\mu} - b_{\iota\mu} b_{\varkappa\lambda}. \tag{15}$$

Während (12) die beiden unabhängigen Gleichungen (13) liefert, gibt (15) nur eine einzige, da der Krümmungstensor auf einer Fläche nur eine unab-

hängige Komponente besitzt. Den Nachweis, daß mit diesen Gleichungen *alle* Integrabilitätsbedingungen der Ableitungsgleichungen aufgestellt sind, geben wir im folgenden Paragraphen. Aus (15) haben wir jedoch gleich hier eine wichtige Folgerung zu ziehen. Für die am Schluß von § 3 erwähnte Invariante ergibt sich nämlich wegen (15)

$$\varepsilon^{\iota\varkappa}\,\varepsilon^{\lambda\mu}\,R_{\iota\varkappa\lambda\mu} = 4\,K, \tag{16}$$

wo $K = \frac{b}{g}$ die GAUSSsche Krümmung unserer Fläche bedeutet. Das heißt aber, daß *die Gaußsche Krümmung eine allein vom Maßtensor und seinen ersten und zweiten Ableitungen abhängige Invariante, also eine Biegungsvariante ist* (vgl. III, § 6). Dieser ganz fundamentale, von GAUSS gefundene Satz wird häufig als *Theorema egregium* bezeichnet. An Stelle von (16) kann man kurz

$$K = \frac{1}{g}\,R_{1212} \tag{17}$$

schreiben; setzt man hier für $R_{1212}$ den aus (3, 12) sich ergebenden Ausdruck ein, so erhält man eine direkte Formel für $K$ in den $g_{\alpha\beta}$ und ihren ersten und zweiten Ableitungen. Eine übersichtlichere Formel erhält man aus der Relation $R^{2}_{\cdot 121} = g_{11}\,K$, die sich wegen

$$R^{\gamma}_{\cdot\varkappa\lambda\mu} = g^{\gamma\iota}\,R_{\iota\varkappa\lambda\mu}$$

und $g^{22} = \frac{g_{11}}{g}$ aus (17) ergibt. Es folgt nach einigen einfachen Rechnungen unter Benutzung der Formeln (3, 5), (1, 28), (2, 6) und (2, 10) der Ausdruck

$$K = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}\right) - \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\right)\right], \tag{18}$$

während man aus $R^{1}_{\cdot 212} = g_{22}K$ die analoge Formel

$$K = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{22}}\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}\right) - \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{22}}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\right)\right] \tag{19}$$

erhält. Eine weitere Formel ergibt sich aus (3, 25), nämlich

$$K = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial_{(12)}\,C_1}{\partial u_2} - \frac{\partial_{(12)}\,C_2}{\partial u_1}\right). \tag{20}$$

Es sei nun unsere Fläche auf orthogonale Parameter bezogen, so daß $g_{12} = 0$ ist. Dann können wir die Vektoren des in (20) verwendeten normierten Zweibeins mit den Tangentenvektoren der Koordinatenlinien zusammenfallen lassen:

$$_{(1)}\lambda^1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}},\quad {}_{(1)}\lambda^2 = 0;\qquad {}_{(2)}\lambda^1 = 0,\quad {}_{(2)}\lambda^2 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}. \tag{21}$$

Aus (2, 25) folgt

$$(22)\qquad \frac{\mathfrak{d}_{(1)}\lambda^2}{\mathfrak{d}u_\beta} = {}_{(12)}C_\beta\,{}_{(2)}\lambda^2 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\,{}_{(12)}C_\beta .$$

Andrerseits ist (man beachte, daß bei orthogonalen Parametern $g^{11} = \frac{1}{g_{11}}$, $g^{12} = 0$, $g^{22} = \frac{1}{g_{22}}$ ist)

$$(23)\qquad \frac{\mathfrak{d}_{(1)}\lambda^2}{\mathfrak{d}u_\beta} = \left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\2\end{matrix}\right\}{}_{(1)}\lambda^\alpha = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\left\{\begin{matrix}1\beta\\2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\,g^{2\alpha}\left[\begin{matrix}1\beta\\\alpha\end{matrix}\right] = \frac{1}{g_{22}\sqrt{g_{11}}}\left[\begin{matrix}1\beta\\2\end{matrix}\right],$$

so daß

$$(24)\qquad {}_{(12)}C_\beta = \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\left\{\begin{matrix}1\beta\\2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\left[\begin{matrix}1\beta\\2\end{matrix}\right],$$

also insbesondere wegen (1, 24)

$$(25)\qquad {}_{(12)}C_1 = -\frac{1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} = -\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\sqrt{g_{11}}}{\partial u_2}$$

und

$$(25')\qquad {}_{(12)}C_2 = \frac{1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial u_1}$$

gilt. Aus (20) oder auch direkt aus (18) erhält man

$$(26)\qquad K = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\left\{\begin{matrix}1\,1\\2\end{matrix}\right\}\right) - \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\}\right)\right]$$

oder

$$(27)\qquad K = \frac{-1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\right)\right]$$

oder schließlich

$$(28)\qquad \boldsymbol{K} = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\sqrt{g_{11}}}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial u_1}\right)\right].$$

Einen besonders einfachen Ausdruck für die Krümmung $K$ erhält man im Fall ametrischer Parameter ($g_{11} = g_{22} = 0$), und zwar am einfachsten durch Einsetzen in (3, 12); es folgt

$$R_{1212} = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u_1 \partial u_2} + \frac{1}{g_{12}}\left(\left[\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right] - \left[\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}1\,1\\2\end{matrix}\right]\right),$$

oder wegen (1, 28)

$$R_{1212} = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{1}{g_{12}}\frac{\partial g_{12}}{\partial u_1}\frac{\partial g_{12}}{\partial u_2} = g_{12}\frac{\partial^2 \ln g_{12}}{\partial u_1 \partial u_2},$$

so daß

$$(29)\qquad \boldsymbol{K} = -\frac{1}{g_{12}}\frac{\partial^2 \ln g_{12}}{\partial u_1 \partial u_2}$$

wird.

Wir erwähnen zum Schluß noch, daß aus (8) und (15) eine weitere Darstellung des Krümmungstensors folgt, nämlich[1])

$$R_{\iota\varkappa\lambda\mu} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_\iota \partial u_\lambda}\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_\varkappa \partial u_\mu} - \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_\iota \partial u_\mu}\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_\varkappa \partial u_\lambda}. \tag{30}$$

## § 5. Das Formenproblem.

Wir verstehen unter dem Formenproblem in der Flächentheorie die Frage nach der Bestimmung einer Fläche durch die beiden Grundformen, also eine in mancher Hinsicht analoge Frage, wie die nach der Bestimmung einer Kurve durch ihre natürlichen Gleichungen, die wir in II, § 3 ausführlich behandelt haben. Wir denken uns die erste und zweite Grundform, d. h. zwei symmetrische kovariante Tensoren zweiter Stufe $g_{\alpha\beta}$ und $b_{\alpha\beta}$ gegeben, deren Komponenten Funktionen zweier Veränderlicher $u_\alpha$ sind, und fragen uns, ob und unter welchen Bedingungen eine Fläche eines dreidimensionalen Raumes existiert, die $g_{\alpha\beta}$ zum Maßtensor und $b_{\alpha\beta}$ zum Haupttensor hat. Wir setzen zunächst voraus, daß die $g_{\alpha\beta}$ mindestens zweimal, die $b_{\alpha\beta}$ mindestens einmal stetig differenzierbare Funktionen der beiden unabhängigen Veränderlichen $u_\alpha$ sind. Die zwölf unbekannten Funktionen $x_i$, $\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} = p_{i\alpha}$ und $\nu_i$ müssen dem folgenden System von Differentialgleichungen genügen:

Zunächst gelten die sechs Gleichungen

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} = p_{i\alpha}, \tag{1}$$

ferner die sich aus der zweiten Gruppe der Ableitungsgleichungen (4, 9) ergebenden Gleichungen

$$\frac{\partial p_{i\alpha}}{\partial u_\beta} = \left\{ {\alpha\beta \atop \lambda} \right\} p_{i\lambda} + b_{\alpha\beta}\nu_i \tag{2}$$

und schließlich die Weingartenschen Gleichungen (4, 2)

$$\frac{\partial \nu_i}{\partial u_\alpha} = - b_\alpha^\lambda p_{i\lambda} = - g^{\varkappa\lambda} b_{\alpha\varkappa} p_{i\lambda}. \tag{3}$$

Ferner müssen die unbekannten Funktionen den Gleichungen

$$\nu_i \nu_i = 1, \tag{4}$$

$$\nu_i p_{i\alpha} = 0, \tag{5}$$

$$p_{i\alpha} p_{i\beta} = g_{\alpha\beta} \tag{6}$$

und

$$\frac{\partial p_{i\alpha}}{\partial u_\beta} \nu_i = b_{\alpha\beta} \tag{7}$$

---

1) Vgl. A. Tonolo, *Una espressione dei simboli di Riemann*. Boll. dell' Unione Mat. Ital. 7 (1928).

genügen, so daß es sich hier um ein sogenanntes *gemischtes System* von Differentialgleichungen handelt. (4) drückt aus, daß der Vektor $\nu_i$ ein Einheitsvektor, (5), daß er der Normalenvektor der zu bestimmenden Fläche ist; (6) ist die bekannte Definition des Maßtensors durch die Ableitungen des Ortsvektors; die Definition (7) der $b_{\alpha\beta}$ ist wegen (2), (4), (5) identisch erfüllt und könnte somit ganz wegbleiben.

Die Integrabilitätsbedingungen der Gleichungen (1) lauten

$$\frac{\partial p_{i\alpha}}{\partial u_\beta} - \frac{\partial p_{i\beta}}{\partial u_\alpha} = 0 \tag{8}$$

und sind wegen (2) identisch erfüllt; die Integrabilitätsbedingungen von (2) sind die im vorigen Paragraphen hergeleiteten Formeln von Gauss (Theorema egregium) und Mainardi-Codazzi. Die Integrabilitätsbedingungen von (3) schließlich können wir, wenn wir nach (2, 18) kovariante Ableitungen statt der gewöhnlichen schreiben, in der Form

$$\frac{\mathfrak{d}^2 \nu_i}{\mathfrak{d}u_\beta \mathfrak{d}u_\alpha} - \frac{\mathfrak{d}^2 \nu_i}{\mathfrak{d}u_\alpha \mathfrak{d}u_\beta} = 0 \tag{9}$$

ansetzen. Nun ist wegen $\frac{\mathfrak{d} g_{\alpha\beta}}{\mathfrak{d}u_\gamma} = 0$

$$\frac{\mathfrak{d}^2 \nu_i}{\mathfrak{d}u_\beta \mathfrak{d}u_\alpha} = \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}u_\beta}\frac{\partial \nu_i}{\partial u_\alpha} = -g^{\varkappa\lambda}\frac{\mathfrak{d} b_{\alpha\varkappa}}{\mathfrak{d}u_\beta} p_{i\lambda} - g^{\varkappa\lambda} b_{\alpha\varkappa}\frac{\mathfrak{d} p_{i\lambda}}{\mathfrak{d}u_\beta}, \tag{10}$$

ferner gilt nach (2)

$$\frac{\mathfrak{d} p_{i\lambda}}{\mathfrak{d}u_\beta} = \frac{\partial p_{i\lambda}}{\partial u_\beta} - \left\{ {\beta\lambda \atop \varrho} \right\} p_{i\varrho} = b_{\beta\lambda}\nu_i,$$

so daß die Bedingungen (9) auch

$$-g^{\varkappa\lambda}\left(\frac{\mathfrak{d} b_{\alpha\varkappa}}{\mathfrak{d}u_\beta} - \frac{\mathfrak{d} b_{\beta\varkappa}}{\mathfrak{d}u_\alpha}\right)p_{i\lambda} - g^{\varkappa\lambda}(b_{\alpha\varkappa}b_{\beta\lambda} - b_{\beta\varkappa}b_{\alpha\lambda})\,\nu_i = 0 \tag{11}$$

geschrieben werden können; der Ausdruck $g^{\varkappa\lambda}(b_{\alpha\varkappa}\,b_{\beta\lambda} - b_{\beta\varkappa}\,b_{\alpha\lambda})$ verschwindet wegen der Symmetrie der $g^{\varkappa\lambda}$ und der Rest ist erfüllt, wenn die $g_{\alpha\beta}$ und $b_{\alpha\beta}$ den Gleichungen von Mainardi-Codazzi genügen.

Damit ist gezeigt, daß mit den Formeln von Gauss und Mainardi-Codazzi in der Tat alle Integrabilitätsbedingungen des Systems partieller Differentialgleichungen (1), (2) und (3) erfüllt sind. Aus der Theorie dieser Differentialsysteme entnehmen wir den Satz: *Sind in einem zweidimensionalen Bereich B sechs Funktionen* $g_{11}, g_{12} = g_{21}, g_{22}, b_{11}, b_{12} = b_{21}, b_{22}$ *zweier unabhängiger Veränderlicher* $u_1, u_2$ *gegeben, von denen die* $g_{\alpha\beta}$ *mindestens zweimal, die* $b_{\alpha\beta}$ *mindestens einmal in B stetig differenzierbar sind und die den Gleichungen* (4, 16) *von Gauß und* (4, 12) *von Mainardi-Codazzi identisch genügen, so existiert zu jedem System von Anfangswerten* $\overset{0}{u}_\alpha, \overset{0}{x}_i, \overset{0}{p}_{i\alpha}, \overset{0}{\nu}_i$ *ein und nur ein System von Lösungen* $x_i, p_{i\alpha}, \nu_i$ *der Differentialgleichungen* (1), (2) *und* (3).

Wir denken uns nun die Anfangswerte $\overset{0}{u}_\alpha, \overset{0}{x}_i, \overset{0}{p}_{i\alpha}, \overset{0}{\nu}_i$ so gewählt, daß sie den Gleichungen (4), (5) und (6) genügen, wobei in (6) für $g_{\alpha\beta}$ der Wert $\overset{0}{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}\left(\overset{0}{u}_1, \overset{0}{u}_2\right)$ zu nehmen ist. Wir behaupten, daß diese Gleichungen dann auch von den Lösungen des Systems identisch erfüllt werden. Während also der obige Satz nur von den Lösungen des Differentialsystems (1), (2) und (3) handelt, gehen wir jetzt an die Diskussion des gemischten Systems (1) bis (6). Wir leiten uns zunächst ein System von Differentialgleichungen für die linken Seiten von (4), (5) und (6), d. h. für die Funktionen $\nu_i \nu_i$, $\nu_i p_{i\alpha}$ und $p_{i\alpha} p_{i\beta} - g_{\alpha\beta}$ her. Durch Differentiation von $\nu_i \nu_i$ folgt wegen (3)

$$\frac{\partial}{\partial u_\alpha}(\nu_i \nu_i) = 2\nu_i \frac{\partial \nu_i}{\partial u_\alpha} = -2 g^{\varkappa\lambda} b_{\alpha\varkappa}(p_{i\lambda}\nu_i), \tag{12}$$

durch Differentiation von $\nu_i p_{i\alpha}$ wegen (2) und (3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_\beta}(\nu_i p_{i\alpha}) &= \nu_i \frac{\partial p_{i\alpha}}{\partial u_\beta} + \frac{\partial \nu_i}{\partial u_\beta} p_{i\alpha} \\ &= -b_\beta^\lambda (p_{i\alpha} p_{i\lambda} - g_{\alpha\lambda}) + \left\{ {\alpha\beta \atop \lambda} \right\} (\nu_i p_{i\lambda}) + b_{\alpha\beta}[(\nu_i \nu_i) - 1] \end{aligned} \tag{13}$$

und schließlich durch Differentiation von $p_{i\alpha} p_{i\beta} - g_{\alpha\beta}$ wegen (2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_\gamma}(p_{i\alpha} p_{i\beta} - g_{\alpha\beta}) &= p_{i\alpha} \frac{\partial p_{i\beta}}{\partial u_\gamma} + p_{i\beta} \frac{\partial p_{i\alpha}}{\partial u_\gamma} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u_\gamma} \\ &= \left\{ {\beta\gamma \atop \lambda} \right\} p_{i\alpha} p_{i\lambda} + b_{\beta\gamma} p_{i\alpha} \nu_i + \left\{ {\alpha\gamma \atop \lambda} \right\} p_{i\beta} p_{i\lambda} + b_{\alpha\gamma} p_{i\beta} \nu_i - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u_\gamma} \\ &= \left\{ {\beta\gamma \atop \lambda} \right\} (p_{i\alpha} p_{i\lambda} - g_{\alpha\lambda}) + \left\{ {\alpha\gamma \atop \lambda} \right\} (p_{i\beta} p_{i\lambda} - g_{\beta\lambda}) \\ &\qquad + b_{\beta\gamma}(\nu_i p_{i\alpha}) + b_{\alpha\gamma}(\nu_i p_{i\beta}). \end{aligned} \tag{14}$$

Wieder existiert zu jedem System von Anfangswerten ein einziges System von Lösungen der Gleichungen (12), (13) und (14); da aber

$$\nu_i \nu_i = 1, \quad \nu_i p_{i\alpha} = 0, \quad p_{i\alpha} p_{i\beta} - g_{\alpha\beta} = 0 \tag{15}$$

ein zu den obigen Anfangswerten gehöriges Lösungssystem ist, ist es auch das einzige. Damit ist die Widerspruchsfreiheit des gemischten Systems (1) bis (6) und zugleich auch die Richtigkeit unserer Behauptung nachgewiesen.

Deuten wir nun die drei Lösungen

$$x_i = x_i(u_1, u_2) \tag{16}$$

als Ortsvektor einer Fläche eines dreidimensionalen euklidischen Raumes, so ist durch die drei Vektoren $p_{i\alpha}$ und $\nu_i$ in Übereinstimmung mit (4) und (5) ihr begleitendes Dreibein gegeben, während $g_{\alpha\beta}$ nach (6) ihr Maßtensor und $b_{\alpha\beta}$ nach (7) — wir erinnern daran, daß (7) eine Folge von (2), (4) und

(5) ist — ihr Haupttensor ist. Die Anfangswerte $\overset{0}{u}_\alpha$, $\overset{0}{x}_i$ sind offenbar vollständig willkürlich wählbar, ebenso die Richtung des Normalenvektors $\overset{0}{\nu}_i$ und die Richtung eines der beiden Vektoren $\overset{0}{p}_{i\alpha}$, etwa die von $\overset{0}{p}_{i1}$, in der zu $\nu_i$ senkrechten Richtung; da die Längen und der Winkel der beiden Vektoren $\overset{0}{p}_{i\alpha}$ durch (6) bestimmt ist, kann $\overset{0}{p}_{i2}$ nur auf zwei Arten angenommen werden, je nach der Orientierung, die man dem begleitenden Dreibein der Fläche im Punkt $\overset{0}{x}_i$ zu geben beabsichtigt. Das heißt aber, daß wir Lage und Orientierung des Dreibeins $\overset{0}{p}_{i\alpha}$, $\overset{0}{\nu}_i$ im Raum ganz beliebig wählen können; nur das Dreibein als solches ist durch die Bedingungen (4), (5) und (6) festgelegt. Damit haben wir den ganz fundamentalen, von Bonnet herrührenden Satz gefunden:

*Durch die Angabe von Maßtensor und Haupttensor, die neben gewissen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbedingungen nur den Gleichungen von Gauß und Mainardi-Codazzi zu genügen haben, ist bis auf Kongruenz und Spiegelung eindeutig eine Fläche bestimmt.*

## § 6. Infinitesimale Verbiegung einer Fläche.

Wollte man nachweisen, daß zwei Flächen

$$x_i = \overset{0}{x}_i(u_1, u_2), \quad x_i = \overset{1}{x}_i(u_1, u_2), \tag{1}$$

die aufeinander durch gleiche Parameterwerte längentreu abgebildet sind, durch eine stetige Verbiegung ineinander übergeführt werden können, so müßte man sich eine einparametrige Flächenschar

$$x_i = x_i(u_1, u_2, t) \tag{2}$$

verschaffen, so daß etwa zum Wert $t = 0$ des Scharparameters die Fläche $\overset{0}{x}_i$ und zum Wert $t = 1$ die Fläche $\overset{1}{x}_i$ gehört. Man wird dabei natürlich verlangen, daß alle Flächen der Schar (2) auf die beiden Ausgangsflächen (1) längentreu abgebildet sind.[1]) In dieser Allgemeinheit ist das Problem bis heute ungelöst.

Wir beschränken uns auf die Untersuchung der bereits sehr aufschlußreichen infinitesimalen Verbiegungen der Ausgangsfläche $x_i = \overset{0}{x}_i$, die wir uns als Fläche $t = 0$ in der Schar (2) eingebettet denken. Dabei seien die Funktionen $x_i(u_1, u_2, t)$ in einer Umgebung des Streifens $t = 0$ mindestens dreimal nach den $u_\alpha$ und mindestens einmal nach $t$ stetig differenzierbar. Dann ist

$$x_i(u_1, u_2, t) = x_i(u_1, u_2, 0) + t\,\frac{\partial}{\partial t}\,x_i(u_1, u_2, 0) \tag{3}$$

1) Damit ist erst eine strenge Definition der stetigen Verbiegung gegeben.

eine Näherungsdarstellung der Schar für kleine $t$, also eine Darstellung der infinitesimalen Verbiegung der Ausgangsfläche. Wir setzen zur Abkürzung

$$x_i(u_1, u_2, t) = \bar{x}_i, \quad x_i(u_1, u_2, 0) = x_i, \quad \frac{\partial}{\partial t} x_i(u_1, u_2, 0) = z_i; \tag{4}$$

(3) lautet dann

$$\bar{x}_i = x_i + t z_i. \tag{5}$$

Daraus folgt durch Differentiation für entsprechende Richtungen auf $\bar{x}_i$ und $x_i$ ($t$ ist hier und im folgenden als konstant anzusehen)

$$d\bar{x}_i = d x_i + t\, dz_i. \tag{6}$$

Sollen die beiden Flächen $\bar{x}_i$ und $x_i$ aufeinander längentreu abgebildet sein, so müssen die quadrierten Bogenelemente $d\bar{s}^2$ und $ds^2$ von $\bar{x}_i$ und $x_i$ identisch in den $u_\alpha$ und $du_\alpha$, d. h. für alle entsprechenden Richtungen in allen entsprechenden Punkten übereinstimmen. Nun ist

$$d\bar{s}^2 = d\bar{x}_i\, d\bar{x}_i = dx_i\, dx_i + 2t\, dx_i\, dz_i = ds^2 + 2t\, dx_i\, dz_i, \tag{7}$$

wobei wir Glieder mit $t^2$ vernachlässigen. Also muß

$$dx_i\, dz_i = 0 \tag{8}$$

sein. Diese Relation besitzt eine einfache geometrische Deutung, wenn wir den Vektor $z_i$ als Ortsvektor einer zweiten Fläche deuten; sie besagt dann, daß entsprechende Linienelemente auf den beiden Flächen $x_i$ und $z_i$ stets aufeinander senkrecht stehen. Man sagt dann, *die beiden Flächen entsprechen einander durch Orthogonalität der Elemente.*

Die Aufgabe, alle infinitesimalen Verbiegungen einer Fläche $x_i$ zu bestimmen, ist also identisch mit der Aufgabe, alle Flächen $z_i$ zu bestimmen, die $x_i$ durch Orthogonalität der Elemente entsprechen.

Eine weiter bemerkenswerte Folgerung aus (8) besteht in dem Satz: *Entsprechen einander zwei Flächen $x_i$ und $z_i$ durch Orthogonalität der Elemente, so sind die beiden Flächen $x_i + z_i$ und $x_i - z_i$ aufeinander längentreu abgebildet und umgekehrt: Sind zwei Flächen $p_i$ und $q_i$ aufeinander längentreu abgebildet, so entsprechen sich $p_i + q_i$ und $p_i - q_i$ durch Orthogonalität der Elemente.* Der äußerst einfache Nachweis sei dem Leser überlassen.

Da (8) identisch in den $du_\alpha$ gilt, ergeben sich daraus die drei Identitäten

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_1}\frac{\partial z_i}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial x_i}{\partial u_1}\frac{\partial z_i}{\partial u_2} + \frac{\partial x_i}{\partial u_2}\frac{\partial z_i}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial x_i}{\partial u_2}\frac{\partial z_i}{\partial u_2} = 0. \tag{9}$$

Wir versuchen nun, einen Vektor $y_i = y_i(u_1, u_2)$ zu bestimmen, für den

$$dz_i = \varepsilon_{ikl}\, y_k\, dx_l \tag{10}$$

identisch in den $u_\alpha$ und $du_\alpha$ und somit

$$\frac{\partial z_i}{\partial u_\alpha} = \varepsilon_{ikl}\, y_k \frac{\partial x_l}{\partial u_\alpha} \tag{11}$$

gilt. Daraus folgt, daß der Vektor $y_i$ auf den beiden Vektoren $\frac{\partial z_i}{\partial u_\alpha}$ senkrecht stehen, also in der Form

$$y_k = \lambda\, \varepsilon_{khj} \frac{\partial z_h}{\partial u_1} \frac{\partial z_j}{\partial u_2} \tag{12}$$

darstellbar sein muß. Dabei nehmen wir zunächst an, daß die beiden Vektoren $\frac{\partial z_i}{\partial u_\alpha}$ linear unabhängig sind, also $z_i$ wirklich eine Fläche beschreibt (III, § 1). Setzt man (12) in (11) ein, so ergibt sich für den Proportionalitätsfaktor $\lambda$ wegen (9)

$$\lambda = \frac{1}{\frac{\partial z_i}{\partial u_1} \frac{\partial x_i}{\partial u_2}}. \tag{13}$$

Der Nenner ist unter der eben getroffenen Annahme stets von Null verschieden, wie wir sofort zeigen werden. Aus (12) und (13) folgt, daß der Vektor $y_i$ eindeutig und widerspruchsfrei bestimmt ist. Setzt man (10) in (6) ein, so folgt

$$d\bar{x}_i - dx_i = t\, \varepsilon_{ikl}\, y_k\, dx_l, \tag{14}$$

d. h. aber, *daß* $t y_i$ *der Drehvektor der infinitesimalen Verbiegung von* $x_i$ *ist* (II, § 7 A).

Aus (11) folgt durch nochmalige Differentiation nach $u_\beta$ und Vertauschung von $\alpha$ und $\beta$ die Integrabilitätsbedingung

$$\varepsilon_{ikl}\left(\frac{\partial y_k}{\partial u_1} \frac{\partial x_l}{\partial u_2} - \frac{\partial y_k}{\partial u_2} \frac{\partial x_l}{\partial u_1}\right) = 0. \tag{15}$$

Durch Überschiebung mit $\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}$ erkennt man unmittelbar, daß die vier Vektoren $\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}, \frac{\partial y_i}{\partial u_\beta}$ in einer Ebene liegen. Deuten wir also $y_k$ als Ortsvektor einer dritten Fläche, so sind *die beiden Flächen* $x_i$ *und* $y_i$, *wenn wir wieder Punkte mit gleichen Parameterwerten einander zuordnen, durch parallele Normalen aufeinander abgebildet.*

Wir wenden uns zu dem oben ausgeschlossenen Fall, daß die Vektoren $\frac{\partial z_i}{\partial u_\alpha}$ proportional sind. Nehmen wir zunächst nur an, daß der Nenner in (13) verschwindet, so folgt aus (9), daß

$$\frac{\partial z_i}{\partial u_\alpha} = \varphi_\alpha \nu_i \tag{16}$$

sein muß, wo $\nu_i$ wie immer der Normalenvektor von $x_i$ ist. Dasselbe ergibt sich, wenn man von proportionalen Vektoren $\frac{\partial z_i}{\partial u_\alpha}$ ausgeht. Die Gleichung (12) verliert dann ihren Sinn, doch läßt sich (11) und (16) erfüllen, wenn man

$$y_k = \lambda^\alpha \frac{\partial x_k}{\partial u_\alpha} \tag{17}$$

setzt, wobei die $\lambda^\alpha$ nach Definition ein kontravarianter Flächenvektor sind. Durch Differentiation folgt, wenn wir rechts kovariante Ableitungen verwenden und (4, 8) berücksichtigen

$$\frac{\partial y_k}{\partial u_\beta} = \lambda^\alpha \frac{\mathfrak{d}^2 x_k}{\mathfrak{d} u_\alpha \mathfrak{d} u_\beta} + \frac{\mathfrak{d} \lambda^\alpha}{\mathfrak{d} u_\beta} \frac{\partial x_k}{\partial u_\alpha} = \lambda^\alpha b_{\alpha\beta} \nu_k + \frac{\mathfrak{d} \lambda^\alpha}{\mathfrak{d} u_\beta} \frac{\partial x_k}{\partial u_\alpha}; \tag{18}$$

in die Integrabilitätsbedingung (15) eingesetzt, gibt das

$$\lambda^\beta \varepsilon_{ikl} \nu_k \left( b_{1\beta} \frac{\partial x_l}{\partial u_2} - b_{2\beta} \frac{\partial x_l}{\partial u_1} \right) = 0. \tag{19}$$

Diese Gleichung kann aber nur bestehen, wenn

$$b_{1\beta} \lambda^\beta = b_{2\beta} \lambda^\beta = 0 \tag{20}$$

ist, denn das äußere Produkt in (19) kann nur verschwinden, wenn $b_{1\beta} \lambda^\beta \frac{\partial x_l}{\partial u_2} - b_{2\beta} \lambda^\beta \frac{\partial x_l}{\partial u_1}$ verschwindet (dieser Vektor steht ja auf $\nu_i$ senkrecht), da aber die $\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}$ sicher linear unabhängig sind, muß, wie angegeben, (20) gelten. Das sind aber zwei homogene lineare Gleichungen für die $\lambda^\beta$, die nur die eine Lösung $\lambda^\beta = 0$ haben, wenn wir Ebenen und Torsen ausschließen, für die $b = b_{11} b_{22} - b_{12}^2 = 0$ ist. Es ist also $y_k = 0$ und wegen (10) auch $dz_i = 0$, also $z_i$ konstant, d. h. *es handelt sich in diesem Fall um eine gewöhnliche Parallelverschiebung der Fläche $x_i$.*

Es liegt nun die Frage nahe, wann die infinitesimale Verbiegung nur eine Bewegung, d. h. genauer eine Bewegung der Fläche als starrer Körper ist. Wir behaupten, *daß die Bewegungen von $x_i$ durch Konstanz des Drehvektors $y_i$ charakterisiert sind.* In der Tat gibt (10) in diesem Fall durch Integration

$$z_i = a_i + \varepsilon_{ikl} y_k x_l \tag{21}$$

und (5) wird somit zu

$$\bar{x}_i = x_i + t(a_i + \varepsilon_{ikl} y_k x_l). \tag{22}$$

Sind nun $p_i$ und $q_i$ die Ortsvektoren zweier beliebiger Punkte von $x_i$, $\bar{p}_i$ und $\bar{q}_i$ die entsprechenden Punkte auf $\bar{x}_i$, so ist

$$\bar{p}_i - \bar{q}_i = p_i - q_i + t \varepsilon_{ikl} y_k (p_l - q_l).$$

Berechnet man das Abstandsquadrat $\bar{D}^2 = (\bar{p}_i - \bar{q}_i)(\bar{p}_i - \bar{q}_i)$, so verschwindet rechts das in $t$ lineare Glied, und es wird $\bar{D}^2 = D^2$, wo $D$ der Abstand der beiden Punkte auf $x_i$ ist, und wobei wieder Glieder in $t^2$ vernachlässigt sind. Es handelt sich somit tatsächlich um eine infinitesimale Bewegung der Fläche als starrer Körper. Die Umkehrung ist unmittelbar einzusehen.

Da die beiden Flächen $x_i$ und $y_i$ durch parallele Normalen aufeinander abgebildet sind, existieren vier Funktionen $C_{\alpha}^{\cdot\lambda}$, die mindestens einmal stetig differenzierbar sind und für die

$$\frac{\partial y_i}{\partial u_\alpha} = C_\alpha^{\cdot\lambda} \frac{\partial x_i}{\partial u_\lambda} \tag{23}$$

gilt. Überschiebt man (23) mit $\frac{\partial x_i}{\partial u_\varkappa} g^{\beta\varkappa}$, so erhält man die Darstellung

$$C_\alpha^{\cdot\beta} = g^{\beta\varkappa} \frac{\partial y_i}{\partial u_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial u_\varkappa}, \tag{24}$$

woraus neben Existenz und Stetigkeit der $C_\alpha^{\cdot\beta}$ und ihrer Ableitungen auch folgt, daß sie einen *gemischten Tensor zweiter Stufe* bilden. Die Integrabilitätsbedingung (15) liefert dann

$$C_\alpha^{\cdot\alpha} = 0, \tag{25}$$

wobei $C_\alpha^{\cdot\alpha}$ als Verjüngungsresultat eines Tensors eine *Invariante* ist. Sind $b_{\alpha\beta}$ und $B_{\alpha\beta}$ die Haupttensoren der Flächen $x_i$ und $y_i$, so folgt aus (23) durch Differentiation nach $u_\beta$ und darauffolgende Überschiebung mit dem gemeinsamen Normalenvektor $\nu_i$

$$B_{\alpha\beta} = C_\alpha^{\cdot\lambda} b_{\beta\lambda} \tag{26}$$

und daraus wegen der Symmetrie der $B_{\alpha\beta}$ durch Vertauschung von $\alpha$ und $\beta$

$$C_1^{\cdot\lambda} b_{2\lambda} = C_2^{\cdot\lambda} b_{1\lambda}. \tag{27}$$

Eine charakteristische Beziehung zwischen den beiden Flächen $x_i$ und $y_i$, die wir jetzt leicht nachweisen können, ist die, daß *den Asymptotenlinien der einen ein konjugiertes Netz der anderen entspricht.* Nach (IV, 5, 8) muß dann $\varepsilon^{\varkappa\lambda}\varepsilon^{\mu\nu} B_{\varkappa\mu} b_{\lambda\nu} = 0$ sein. Diese Relation ist in der Tat eine Folge von (25), wie man auf Grund der Definition (III, 4, 18) des $\varepsilon$-Tensors durch einfache Rechnung bestätigt. Die Beziehung zwischen den beiden Flächen $x_i$ und $y_i$ ist vollkommen symmetrisch, man spricht von einem *Paar assoziierter Flächen.* Daß die Beziehung charakteristisch ist, d. h. daß $y_i$ (bis auf einen Skalarfaktor) der Drehvektor einer infinitesimalen Verbiegung von $x_i$ und wegen der Symmetrie der Beziehung auch $x_i$ der Drehvektor einer infinitesimalen Verbiegung von $y_i$ ist, wenn $x_i$ und $y_i$ assoziierte Flächen sind, ist unmittelbar aus der oben angedeuteten Rechnung zu entnehmen. Mit (25) ist aber die Integrabilitätsbedingung (15) von (11) bekannt, und durch Integration von (11) erhält man Flächen $z_i$, die dann, wie schon erwähnt, infinitesimale Verbiegungen von $x_i$ bestimmen.

Wegen einer weitergehenden Behandlung der infinitesimalen Verbiegung sei der Leser auf das großangelegte Werk von Darboux verwiesen.[1])

1) Théorie des surfaces, Bd. IV.

# VI. Geometrie auf der Fläche.

## § 1. Die Parallelverschiebung von Flächenvektoren.

Es handelt sich hier um einen Begriff, der mit dem des Parallelismus in der affinen und metrischen Geometrie in anschaulicher Hinsicht nur den Namen gemeinsam hat, denn der Begriff des Parallelseins kann sich doch zunächst überhaupt nur auf lineare Gebilde beziehen, wie z. B. Gerade, Ebenen oder Vektoren im euklidischen oder affinen Raum. Auf der Fläche, d. h. im RIEMANNschen $R_2$ läßt sich ein Vektor aber, wie wir gesehen haben, keineswegs als gerichtete Strecke deuten. Es ist jedoch, wie T. LEVI-CIVITA gezeigt hat, möglich, eine Übertragung von Flächenvektoren aus einem Flächenpunkt in einen anderen zu definieren, die eine Reihe wichtiger Eigenschaften mit der euklidischen Parallelverschiebung gemeinsam hat und mit dieser völlig identisch wird, wenn die Fläche eine Ebene ist. Wir erinnern in diesem Zusammenhang daran, daß wir bis jetzt überhaupt kein Mittel in der Hand haben, zwei Flächenvektoren mit verschiedenem Anfangspunkt irgendwie miteinander zu vergleichen, etwa den von ihnen eingeschlossenen Winkel anzugeben, wenn wir uns die Fläche nicht in einen euklidischen Raum eingebettet denken und den Winkel dann nach der Metrik dieses Raumes messen, indem wir den einen Vektor parallel (euklidisch) so verschieben, daß die Anfangspunkte zusammenfallen und dann ihren Winkel messen. Eine derartige Winkelmessung hat aber keinen absoluten Sinn, d. h. keinen Sinn in der Geometrie auf der Fläche, da wenigstens im allgemeinen ein Vektor bei einer solchen Parallelverschiebung aufhört, Flächenvektor zu sein. Unsere Definition der Parallelverschiebung muß also in erster Linie die Eigenschaft haben, nicht aus der Fläche herauszuführen. Daß im übrigen die Einführung dieses Begriffes in der RIEMANNschen Geometrie von großem heuristischen Wert sein wird, ist leicht einzusehen, wenn man bedenkt, wie wesentlich für die euklidische Geometrie die Tatsache ist, daß Vektoren bei Parallelverschiebung überhaupt ungeändert bleiben, was uns von vornherein zu einer vom Anfangspunkt unabhängigen Definition der Vektoren des euklidischen Raumes veranlaßt hat. Ja, noch mehr, man kann allein aus der Definition von Übertragungsgesetzen (d. h. von Parallelverschiebungen) Geometrien in abstrakten Mannigfaltigkeiten konstruieren — es seien hier die Untersuchungen von WEYL und SCHOUTEN genannt —, die selbst die allgemeine RIEMANNsche Geometrie als Sonderfall enthalten.

Die eben erwähnte Tatsache, daß Vektoren eines euklidischen Raumes bei einer Parallelverschiebung ungeändert bleiben, läßt sich in der einfachen Formel

$$d\xi_i = 0 \tag{1}$$

ausdrücken, die somit nichts anderes als das Übertragungsgesetz der euklidischen Geometrie ist. Es liegt nun nahe, die Parallelverschiebung von Flächenvektoren ganz analog mit Hilfe des absoluten Differentials in der Form

$$\mathfrak{d}\xi^\alpha = \mathfrak{d}\xi_\alpha = 0 \tag{2}$$

zu definieren. Ausführlich lauten die Formeln (2) nach (V, 1, 21) und (V, 1, 22)

$$d\xi^\alpha = -\left\{ {\beta\gamma \atop \alpha} \right\} \xi^\beta du_\gamma \tag{3}$$

und

$$d\xi_\alpha = \left\{ {\alpha\gamma \atop \beta} \right\} \xi_\beta du_\gamma. \tag{4}$$

Die Formeln (3) und (4) lassen sich in einfacher Weise deuten, wenn wir uns die Fläche wieder in einen euklidischen Raum eingebettet denken. Wir betrachten einen Flächenvektor mit dem Anfangspunkt $P$ sowie eine durch $P$ gehende Kurve $C$ und konstruieren die der Fläche längs $C$ umschriebene Torse, d. h. die Hüllfläche der Tangentenebenen der Fläche in den Punkten von $C$.[1]) Der Vektor mit dem Anfangspunkt $P$ ist dann auch Flächenvektor auf der Torse und geht in einen euklidischen Vektor über, wenn wir die Torse in eine Ebene verbiegen. Sei $C'$ die bei dieser Verbiegung aus $C$ entstehende Kurve. Längs dieser Kurve verschieben wir den Vektor parallel — in euklidischem Sinn — etwa bis zu einem Punkt $Q$ von $C'$. Dann verbiegen wir die Ebene wieder in ihre ursprüngliche Gestalt und legen sie so wie früher um unsere Fläche. Im Punkt $Q$ ist dann ein Flächenvektor gegeben, und dieser ist parallel zum Vektor in $P$ nach der Definition (2). Zum Beweis bezeichnen wir mit $\xi^\alpha$ die kontravarianten Komponenten unseres Flächenvektors mit dem Anfangspunkt $P$. Seine Komponenten, als Vektor im euklidischen Raum angesehen, sind dann

$$p_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \xi^\alpha. \tag{5}$$

Wir erinnern nun an die in IV, § 5 angegebenen charakteristischen Eigenschaften konjugierter Richtungen und bezeichnen mit $d_i$ den (infinitesimalen)

1) Die Konstruktion — nicht aber die folgende Formel (6) — versagt in gewissen Ausnahmefällen, z. B. wenn $C$ eine Gerade ist. Diese Schwierigkeiten lassen sich vermeiden, wenn man die Fläche wie einen starren Körper längs $C$ auf einer Ebene rollen läßt. Der Ort der Berührungspunkte *(Polhodie)* ist dann identisch mit der oben verwendeten Kurve $C'$. Vgl. E. Persico, Rendiconti Lincei 30 (1921), S. 12.

Drehvektor der Tangentenebene beim Durchgang durch $P$ in der Richtung der Kurve $C$. Der Vektor $d_i$ hat dann die zum Tangentenvektor von $C$ in $P$ konjugierte Richtung, die außerdem mit der Richtung der durch $P$ gehenden Erzeugenden der längs $C$ umschriebenen Torse übereinstimmt. Dann ist offenbar (vgl. auch II, § 7 A)

$$dp_i = \varepsilon_{ikl}\, d_k\, p_l \tag{6}$$

die Definition der Parallelverschiebung in euklidischen Komponenten, denn der Vektor $p_i$ dreht sich bei dieser jeweils um die Erzeugende der umschriebenen Torse und der Drehwinkel ist gleich dem Drehwinkel der Tangentenebene, also gleich der Länge des Vektors $d_i$, der somit zugleich der Drehvektor für die infinitesimale Parallelverschiebung ist. Da $d_i$ Flächenvektor ist, folgt aus (5) noch

$$dp_i = \varepsilon_{ikl}\, d_k p_l = \sigma \nu_i, \tag{7}$$

wo $\sigma$ ein Proportionalitätsfaktor und $\nu_i$ der Normalenvektor der Fläche im Punkt $P$ ist. Daraus erhält man eine einfache Näherungskonstruktion für die Parallelverschiebung, d. h. für die Lösung der Differentialgleichung (6): Man verschiebt den Vektor von $P$ euklidisch parallel in einen nahe bei $P$ gelegenen Punkt $P'$ von $C$, projiziert ihn dann senkrecht in die Tangentenebene der Fläche in $P'$ usw.

Wir zeigen nun noch, daß (6) mit (3) äquivalent ist. Aus (5) ergibt sich durch Differentiation

$$d p_i = \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} \xi^\alpha du_\beta + \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} d\xi^\alpha$$

und daraus unter Berücksichtigung von (7) durch Überschiebung mit $\frac{\partial x_i}{\partial u_\gamma}$

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} \frac{\partial x_i}{\partial u_\gamma} \xi^\alpha du_\beta + \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial u_\gamma} d\xi^\alpha = 0,$$

oder wegen (V, 2, 19) und (V, 2, 21)

$$\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\end{bmatrix} \xi^\alpha du_\beta + g_{\alpha\gamma}\, d\xi^\alpha = 0.$$

Durch Überschiebung mit $g^{\gamma\lambda}$ folgt weiter

$$\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \lambda\end{Bmatrix} \xi^\alpha du_\beta + \delta^\lambda_\alpha d\xi^\alpha = 0$$

oder

$$d\xi^\lambda = -\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \lambda\end{Bmatrix} \xi^\alpha du_\beta,$$

was bis auf die Bezeichnung der Indizes mit (3) übereinstimmt.

Unter Benützung der Formeln (V, 2, 29) und (V, 2, 30) nehmen die Differentialgleichungen der Parallelverschiebung die Form

(8) $$d_{(\varrho)}\xi + {}_{(\sigma)}\xi\, {}_{(\sigma\varrho)}C_\beta\, du_\beta = 0$$

an, die vor allem dadurch bemerkenswert ist, daß sie für kovariante und kontravariante Komponenten eines Vektors $\xi$ in gleicher Weise gilt.

Es seien nun im Punkt $P$ zwei Vektoren gegeben, etwa der eine durch seine kovarianten, der andere durch seine kontravarianten Komponenten. Verschieben wir beide Vektoren parallel längs der Kurve $C$, so gilt für ihr inneres Produkt

(9) $$d(\xi^\alpha \eta_\alpha) = \mathfrak{d}(\xi^\alpha \eta_\alpha) = \xi^\alpha \mathfrak{d}\eta_\alpha + \eta_\alpha \mathfrak{d}\xi^\alpha = 0$$

nach (2). *Das innere Produkt zweier Vektoren bleibt somit bei einer Parallelverschiebung ungeändert.* Lassen wir die beiden Vektoren zusammenfallen, so ist das innere Produkt das Quadrat der Länge des Vektors, d. h. *die Länge eines Vektors bleibt bei Parallelverschiebung ungeändert.* Dann folgt aber aus dem ersten Satz, daß *sich auch der Winkel zweier Vektoren bei einer Parallelverschiebung nicht ändert.*

Diese beiden wichtigen Eigenschaften hat die verallgemeinerte Parallelverschiebung mit der euklidischen gemeinsam. Ein wesentlicher Unterschied ist aber darin zu erblicken, daß sie vom *Verschiebungsweg*, d. h. von der Kurve $C$ abhängig ist. Ist $C$ gegeben durch $u_\alpha = u_\alpha(t)$ und entspricht der Punkt dem Parameterwert $t_0$, der Punkt $Q$ von $C$ dem Parameterwert $t$, so ist der durch Parallelverschiebung des Vektors $\overset{0}{\xi}$ mit dem Anfangspunkt $P$ entstehende Vektor $\xi$ mit dem Anfangspunkt $Q$ gegeben durch die lineare Integralgleichung

(10) $$\xi^\lambda = \overset{0}{\xi}{}^\lambda - \int_{t_0}^{t} \left\{ {\alpha\beta \atop \lambda} \right\} \xi^\alpha \frac{du_\beta}{dt}\, dt$$

bzw.

(11) $$\xi_\mu = \overset{0}{\xi}_\mu + \int_{t_0}^{t} \left\{ {\beta\mu \atop \alpha} \right\} \xi_\alpha \frac{du_\beta}{dt}\, dt.$$

Die Integrale sind dann und nur dann vom Weg unabhängig, wenn der Integrand ein vollständiges Differential ist; die Bedingung dafür lautet bekanntlich[1]), etwa für das Integral in (10)

(12) $$\frac{\partial}{\partial u_\gamma}\left(\left\{ {\alpha\beta \atop \lambda} \right\} \xi^\alpha\right) - \frac{\partial}{\partial u_\beta}\left(\left\{ {\alpha\gamma \atop \lambda} \right\} \xi^\alpha\right) = 0.$$

1) Es würde hier selbstverständlich genügen, $\beta = 1$ und $\gamma = 2$ zu nehmen, wir ziehen aber die allgemeine Form (12) vor.

Wegen $$\frac{\partial}{\partial u_\gamma}\left(\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \lambda\end{Bmatrix}\xi^\alpha\right) = \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial u_\gamma}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \lambda\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\varrho\beta\\ \lambda\end{Bmatrix}\frac{\partial \xi^\varrho}{\partial u_\gamma}$$

(im zweiten Glied steht $\varrho$ statt $\alpha$) und der aus (3) folgenden Formel

$$\frac{\partial \xi^\varrho}{\partial u_\gamma} = -\begin{Bmatrix}\alpha\gamma\\ \varrho\end{Bmatrix}\xi^\alpha \tag{13}$$

wird aus (12)

$$\xi^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial u_\gamma}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \lambda\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial u_\beta}\begin{Bmatrix}\alpha\gamma\\ \lambda\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\beta\varrho\\ \lambda\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\gamma\\ \varrho\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\gamma\varrho\\ \lambda\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \varrho\end{Bmatrix}\right) = 0$$

oder nach (V, 3, 5) $$R^{\lambda}_{\cdot\alpha\beta\gamma}\xi^\alpha = 0.$$

Soll das Integral für alle Vektoren vom Weg unabhängig sein, so muß also $R^{\lambda}_{\cdot\alpha\beta\gamma} = 0$, daher auch $R_{\mu\alpha\beta\gamma} = 0$ sein und nach (V, 4, 16) die Krümmung $K$ der Fläche verschwinden. Die Flächen mit $K = 0$ sind aber Torsen oder Ebenen, d. h. im Sinn der Geometrie auf der Fläche immer Ebenen, wo die euklidische Parallelverschiebung gilt. Bezieht man die Ebene auf rechtwinklige kartesische Koordinaten, so ist $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ und alle Christoffelklammern verschwinden; die Integrale in (10) und (11) haben beide den Wert Null und es wird $\xi^\lambda = \overset{0}{\xi}{}^\lambda$. Kovariante und kontravariante Komponenten eines Vektors sind identisch.

## § 2. Kurven auf der Fläche. Geodätische Krümmung.

Wir gehen nun daran, die Theorie der Kurven eines Riemannschen $R_2$ in ihren Grundzügen zu entwickeln. Unsere Überlegungen sind eine Verallgemeinerung der Theorie der ebenen Kurven, die in unseren Untersuchungen über Kurven im euklidischen Raum als Sonderfall enthalten ist, so daß wir uns diese in mancher Hinsicht als Muster nehmen können.

Es sei also $u_\alpha = u_\alpha(t)$ eine Kurve; die zwei Funktionen $u_\alpha(t)$ seien zweimal stetig differenzierbar. Das quadrierte Bogenelement ist dann

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\,du_\alpha\,du_\beta = g_{\alpha\beta}\frac{du_\alpha}{dt}\frac{du_\beta}{dt}\,dt^2. \tag{1}$$

Führen wir die dadurch definierte Bogenlänge $s$ als Kurvenparameter ein, so wird

$$g_{\alpha\beta}\frac{du_\alpha}{ds}\frac{du_\beta}{ds} = 1; \tag{2}$$

für den längs der Kurve definierten kontravarianten Vektor

$$\xi^\alpha = \frac{du_\alpha}{ds} \tag{3}$$

ist somit

$$g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta = 1. \tag{4}$$

Der Vektor (3) ist also ein Einheitsvektor und heißt *Tangentenvektor* der Kurve im Punkt $(u_1, u_2)$. Ist unser RIEMANNscher $R_2$ eine Fläche im euklidischen Raum mit der Parameterdarstellung $x_i = x_i(u_1, u_2)$, so sind die $\xi^\alpha$ die kontravarianten Komponenten des euklidischen Tangentenvektors der Raumkurve $x_i = x_i(u_1(s), u_2(s))$.

Aus (4) folgt durch absolute Differentiation

$$g_{\alpha\beta}\xi^\alpha \frac{\mathfrak{d}\xi^\beta}{\mathfrak{d}s} = 0, \tag{5}$$

der Vektor $\frac{\mathfrak{d}\xi^\alpha}{\mathfrak{d}s}$ steht somit auf dem Tangentenvektor $\xi^\alpha$ senkrecht; den Einheitsvektor gleicher Richtung (aber nicht notwendig gleicher Orientierung) nennen wir den *Normalenvektor* der Kurve und bezeichnen ihn mit $\eta^\alpha$. Mit Hilfe eines geeigneten Normierungsfaktors können wir

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\mathfrak{d}\xi^\alpha}{\mathfrak{d}s} = \eta^\alpha \tag{6}$$

setzen. Für $\gamma$ ergibt sich dann die Gleichung

$$g_{\alpha\beta}\eta^\alpha\eta^\beta = \frac{1}{\gamma^2} g_{\alpha\beta}\frac{\mathfrak{d}\xi^\alpha}{\mathfrak{d}s}\frac{\mathfrak{d}\xi^\beta}{\mathfrak{d}s} = 1 \tag{7}$$

oder

$$\gamma^2 = g_{\alpha\beta}\frac{\mathfrak{d}\xi^\alpha}{\mathfrak{d}s}\frac{\mathfrak{d}\xi^\beta}{\mathfrak{d}s}. \tag{8}$$

Der Skalar $\gamma$ wäre in naheliegender Verallgemeinerung als *Krümmung* der Kurve im RIEMANNschen $R_2$ zu bezeichnen. Wir wollen jedoch die gebräuchliche, allerdings nicht sehr treffende Bezeichnung *geodätische Krümmung* verwenden. Deutet man den RIEMANNschen $R_2$ wieder als Fläche im euklidischen Raum, so ist unsere Kurve zugleich eine Raumkurve und besitzt als solche auch eine Krümmung $\varkappa$ im Sinn von Abschnitt II, die von der geodätischen Krümmung $\gamma$, wie wir gleich sehen werden, im allgemeinen durchaus verschieden ist, so daß eine andere Bezeichnung für $\gamma$ wohl gerechtfertigt ist.

Das Vorzeichen der geodätischen Krümmung ist in einem Punkt der Kurve willkürlich wählbar, ist aber dadurch dann längs der ganzen Kurve festgelegt, wenn man will, daß der Normalenvektor (6) längs der Kurve stetig variiert; $\gamma$ wechselt das Vorzeichen in allen Punkten, wo das Zweibein $\xi^\alpha$, $\frac{\mathfrak{d}\xi^\alpha}{\mathfrak{d}s}$ seine Orientierung wechselt (vgl. die analoge Festsetzung in II, § 2).

Die Frenetformeln für Flächenkurven bestehen erstens aus der Gleichung (6) oder

$$\frac{\mathfrak{d}\xi^\alpha}{\mathfrak{d}s} = \gamma\eta^\alpha, \tag{9}$$

während die zweite — mehr als zwei kann es natürlich hier nicht geben — die Form

$$\frac{\mathfrak{d}\eta^\alpha}{\mathfrak{d}s} = \lambda\xi^\alpha \tag{10}$$

haben muß, wo $\lambda$ ein noch zu bestimmender Skalarfaktor ist, da $\frac{\mathfrak{d}\eta^\alpha}{\mathfrak{d}s}$ wieder auf $\eta^\alpha$ senkrecht steht, also die Richtung von $\xi^\alpha$ hat. Aus

$$g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\eta^\beta = 0$$

folgt durch absolute Differentiation

$$g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\frac{\mathfrak{d}\eta^\beta}{\mathfrak{d}s} + g_{\alpha\beta}\frac{\mathfrak{d}\xi^\alpha}{\mathfrak{d}s}\eta^\beta = 0, \tag{11}$$

also wegen (9) und (10)

$$\lambda + \gamma = 0, \tag{12}$$

so daß (10) zu

$$\frac{\mathfrak{d}\eta^\alpha}{\mathfrak{d}s} = -\gamma\xi^\alpha \tag{13}$$

wird. Ist ${}_{(\varrho)}\lambda$ ein längs unserer Kurve definiertes normiertes Zweibein und sind

$$\xi^\alpha = {}_{(\varrho)}\xi\,{}_{(\varrho)}\lambda^\alpha,\quad \eta^\alpha = {}_{(\varrho)}\eta\,{}_{(\varrho)}\lambda^\alpha \tag{14}$$

die Darstellungen von $\xi^\alpha$ und $\eta^\alpha$ in diesem, so lassen sich nach (V, 2, 29) die beiden Frenetformeln (9) und (13) in der Form

$$\begin{cases} \dfrac{d\,{}_{(\varrho)}\xi}{ds} + {}_{(\sigma)}\xi\,{}_{(\sigma\varrho)}C_\beta\dfrac{du_\beta}{ds} = \gamma\,{}_{(\varrho)}\eta \\ \dfrac{d\,{}_{(\varrho)}\eta}{ds} + {}_{(\sigma)}\eta\,{}_{(\sigma\varrho)}C_\beta\dfrac{du_\beta}{ds} = -\gamma\,{}_{(\varrho)}\xi \end{cases} \tag{15}$$

schreiben.

Die Krümmung $\varkappa$ einer Kurve in einem Punkt $P_0$ läßt sich bekanntlich[1]) auch durch

$$\varkappa = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \frac{d\tau}{ds} \tag{16}$$

erklären, wo $\Delta s$ die Länge des durch $P_0$ und einen zweiten Punkt $P$ bestimmten Kurvenbogens und $\Delta\tau$ der von den Tangenten in $P_0$ und $P$ eingeschlossene Winkel ist. Diese Erklärung läßt sich sinngemäß auf Flächenkurven übertragen und liefert dann wieder die geodätische Krümmung $\gamma$. Es seien also jetzt $P_0$ und $P$ zwei Punkte einer Flächenkurve $C$, die wir wieder als zweimal stetig differenzierbar voraussetzen. Im Punkt $P$ sei ein kovarianter Einheitsvektor $\lambda_\alpha$ gegeben, den wir dann in allen Punkten von $C$ durch Parallelverschiebung erklären. Ist ferner $\xi^\alpha$ der Tangentenvektor von $C$, so können wir den Winkel $\tau$ durch

$$\cos\tau = \xi^\alpha\lambda_\alpha \tag{17}$$

definieren. Dann ist

$$\gamma = \frac{d\tau}{ds} = \frac{d}{ds}\arccos\xi^\alpha\lambda_\alpha. \tag{18}$$

1) Vgl. II, § 3, $d\tau = ds_1$.

In der Tat ergibt sich aus (17) durch Differentiation wegen $\frac{\mathfrak{d}\lambda_\alpha}{\mathfrak{d}s} = 0$ und (6)

$$-\sin\tau\frac{d\tau}{ds} = -\sin\tau\frac{\mathfrak{d}\tau}{\mathfrak{d}s} = \lambda_\alpha\frac{\mathfrak{d}\xi^\alpha}{\mathfrak{d}s} = \gamma\lambda_\alpha\eta^\alpha.$$

Nun ist aber $\lambda_\alpha\eta^\alpha = \pm\sin\tau$, so daß wir bis auf das unwesentliche Vorzeichen wirklich die Formel (18) erhalten.

Aus (18) können wir eine wichtige Folgerung ziehen, wenn wir unsere Fläche wieder in einen euklidischen Raum eingebettet denken. Es seien

$$p_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}\xi^\alpha, \quad l_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}g^{\alpha\beta}\lambda_\beta$$

die kartesischen Komponenten des Tangentenvektors und des Hilfsvektors; den letzteren lassen wir in $P_0$ mit der in der Tangentenebene von $P_0$ liegenden Normalen von $C$ zusammenfallen, so daß in $P_0$ der Winkel $\tau = \frac{\pi}{2}$ ist. Dann wird in $P_0$

$$\gamma = \frac{d\tau}{ds} = \frac{d}{ds}\arccos p_i l_i = -p_i' l_i - p_i l_i'.$$

Nun gilt nach (1, 7) für den parallelverschobenen Hilfsvektor $l_i$

$$l_i' = \varrho\nu_i,$$

also ist $p_i l_i' = 0$ und es folgt

$$\gamma = -p_i' l_i \tag{19}$$

und somit bei geeigneter Wahl des Vorzeichens der räumlichen Krümmung

$$\gamma = \varkappa\cos\vartheta, \tag{20}$$

wo $\vartheta$ der Winkel zwischen der Schmiegebene von $C$ und der Tangentenebene unserer Fläche im Punkt $P_0$ ist. Wegen

$$l_i = \varepsilon_{ikl}\,p_k\,\nu_l, \tag{21}$$

wo $\nu_i$ die Flächennormale in $P_0$ ist, erhält man aus (19) die zur Berechnung von $\gamma$ manchmal bequeme Formel

$$\gamma = \varepsilon_{ikl}\,p_i\,p_k'\,\nu_l = \varepsilon_{ikl}\,x_i'\,x_k''\,\nu_l. \tag{22}$$

Aus (20) entnimmt man: *Die geodätische Krümmung einer Flächenkurve $C$ in einem Punkt $P$ stimmt mit der gewöhnlichen Krümmung jener ebenen Kurve $\overline{C}$ in $P$ überein, die man durch senkrechte Projektion von $C$ in die Tangentenebene der Fläche im Punkt $P$ erhält.* Wir haben dazu noch zu zeigen, daß für die Krümmung $\bar{\varkappa}$ von $\overline{C}$ in $P$

$$\bar{\varkappa} = \varkappa\cos\vartheta$$

gilt. Nun projiziert sich der Krümmungskreis von $C$ in $P$ in eine Ellipse mit den Halbachsen $\varrho = \frac{1}{\varkappa}$ und $\varrho\cos\vartheta$, die $\overline{C}$ in $P$ dreipunktig berührt, und

zwar ist $P$ ein Scheitel dieser Ellipse. Sind $x, y$ rechtwinklige Koordinaten in der Tangentenebene von $P$, so daß

$$y^2 = (\varrho^2 - x^2)\cos\vartheta$$

die Gleichung der Ellipse und $P$ der Punkt $x = 0,\ y = -\varrho\cos\vartheta$ ist. Dann wird

$$y y' = -x\cos^2\vartheta \quad \text{und} \quad y'^2 + y y'' = -\cos^2\vartheta,$$

also in $P$: $y' = 0,\ y'' = \bar{\varkappa} = \varkappa\cos\vartheta$, w. z. b. w.

Wegen dieser charakteristischen Eigenschaft nennt man die geodätische Krümmung mitunter auch *Tangentialkrümmung*. Der zu $P$ gehörige Krümmungsmittelpunkt $M$ von $\bar{C}$ (der also in der Tangentenebene liegt) wird als *Mittelpunkt*, die Strecke $PM = \frac{1}{\gamma}$ als *Radius der geodätischen Krümmung* $\gamma$ von $C$ in $P$ bezeichnet. Vgl. hierzu § 6 D.

Eine weitere charakteristische Eigenschaft ist aus der Definition (18) im Zusammenhang mit der anschaulichen Erklärung der Parallelverschiebung von Flächenvektoren in § 1 zu entnehmen. Es gilt nämlich: *Die geodätische Krümmung einer Flächenkurve $C$ stimmt mit der gewöhnlichen Krümmung jener ebenen Kurve überein, die man durch Abwicklung der der Fläche längs $C$ umschriebenen Torse erhält.*[1]) Daraus erklärt sich die dritte gebräuchliche Bezeichnung von $\gamma$ als *Abwickelkrümmung* einer Flächenkurve.

Wir gehen nun daran, einen Ausdruck für die geodätische Krümmung einer in impliziter Form

$$\varphi(u_1, u_2) = \text{konst.} \tag{23}$$

gegebenen Flächenkurve aufzustellen, wobei $\varphi$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion der $u_\alpha$ ist. Wegen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_\alpha} d u_\alpha = 0 \tag{24}$$

hat der kovariante Vektor $\frac{\partial\varphi}{\partial u_\alpha}$ die Richtung des Normalenvektors, während das Quadrat seiner Länge (über die Bezeichnung vgl. III, § 7)

$$\nabla\varphi = g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\beta} \tag{25}$$

ist, so daß

$$\eta^\alpha = \frac{g^{\alpha\beta}}{\sqrt{\nabla\varphi}}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\beta} \tag{26}$$

wird. Ferner können wir wegen (24)

$$d u_\alpha = \psi\,\varepsilon^{\alpha\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\varrho} \tag{27}$$

1) Vgl. die Fußnote S. 184.

setzen; aus [vgl. (III, 4, 21)]

$$ds^2 = \psi^2 g_{\alpha\beta}\,\varepsilon^{\alpha\varrho}\varepsilon^{\beta\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\sigma} = \psi^2 g^{\varrho\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\sigma} = \psi^2\nabla\varphi$$

folgt für den Skalar $\psi$

$$ds = \psi\sqrt{\nabla\varphi}. \tag{28}$$

Der Tangentenvektor ist somit

$$\xi^\alpha = \frac{du_\alpha}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\nabla\varphi}}\varepsilon^{\alpha\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\varrho}; \tag{29}$$

aus (24) oder

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_\alpha}\xi^\alpha = 0 \tag{30}$$

ergibt sich durch Differentiation

$$\frac{\mathfrak{d}^2\varphi}{\mathfrak{d}u_\alpha\,\mathfrak{d}u_\beta}\xi^\alpha\xi^\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial u_\alpha}\gamma\eta^\alpha = 0. \tag{31}$$

Wegen (26) ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_\alpha}\eta^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\nabla\varphi}}g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\beta} = \sqrt{\nabla\varphi} \tag{32}$$

und wegen (29) folgt schließlich

$$\gamma = -\frac{1}{\sqrt{(\nabla\varphi)^3}}\,\varepsilon^{\alpha\varrho}\varepsilon^{\beta\sigma}\frac{\mathfrak{d}^2\varphi}{\mathfrak{d}u_\alpha\,\mathfrak{d}u_\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\sigma}. \tag{33}$$

Dieser Ausdruck läßt sich ohne Schwierigkeit in eine für die Rechnung bequemere Gestalt bringen. Wegen der Formel (III, 4, 23), d. h.

$$\varepsilon^{\alpha\varrho}\varepsilon^{\beta\sigma} = g^{\alpha\beta}g^{\varrho\sigma} - g^{\alpha\sigma}g^{\beta\varrho} \tag{34}$$

und (25) ergibt sich

$$\gamma = -\frac{1}{\sqrt{\nabla\varphi}}g^{\alpha\beta}\frac{\mathfrak{d}^2\varphi}{\mathfrak{d}u_\alpha\,\mathfrak{d}u_\beta} + \frac{1}{\sqrt{(\nabla\varphi)^3}}g^{\alpha\sigma}g^{\beta\varrho}\frac{\mathfrak{d}^2\varphi}{\mathfrak{d}u_\alpha\,\mathfrak{d}u_\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\sigma}. \tag{35}$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\frac{1}{\sqrt{\nabla\varphi}} = \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}u_\alpha}\frac{1}{\sqrt{\nabla\varphi}} = -\frac{1}{2\sqrt{(\nabla\varphi)^3}}\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}u_\alpha}\left(g^{\beta\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\varrho}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{(\nabla\varphi)^3}}g^{\beta\varrho}\frac{\mathfrak{d}^2\varphi}{\mathfrak{d}u_\alpha\,\mathfrak{d}u_\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\varrho},$$

so daß aus (35)

$$\gamma = -\frac{1}{\sqrt{\nabla\varphi}}\Delta\varphi - \nabla\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{\nabla\varphi}}\right) \tag{36}$$

wird. Setzen wir hier noch für $\Delta\varphi$ den Ausdruck (III, 7, 21) ein, so folgt

$$\gamma = -\frac{1}{\sqrt{g}\sqrt{\nabla\varphi}}\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\sqrt{g}\,g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\beta}\right) - g^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\frac{1}{\sqrt{\nabla\varphi}}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u_\beta}, \tag{37}$$

oder

$$\gamma = -\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\sqrt{\frac{g}{\nabla\varphi}}\,g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\beta}\right). \tag{38}$$

Dieser Ausdruck für die geodätische Krümmung $\gamma$ rührt im wesentlichen von BONNET her.

Eine weitere, von DARBOUX herrührende Formel für $\gamma$ läßt sich mit Hilfe des Winkels $\varphi$ gewinnen, den die gegebene Kurve $C$ im Punkt $P$ mit der 1-Linie ($u_2 =$ konst.) einschließt. Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ das begleitende Zweibein von $C$, mit $\boldsymbol{\mu}$ einen längs $C$ definierten Einheitsvektor, der in jedem Punkt von $C$ mit dem Tangentenvektor der 1-Linie zusammenfällt und mit $\boldsymbol{\nu}$ den zu $\boldsymbol{\mu}$ senkrechten Einheitsvektor, so daß das Zweibein $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$ ebenso orientiert ist wie das Zweibein $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$. Dann ist

$$\cos\varphi = \xi^\alpha \mu_\alpha$$

und

$$-\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{ds} = \mu_\alpha\frac{\mathfrak{d}\xi^\alpha}{\mathfrak{d}s} + \xi^\alpha\frac{\mathfrak{d}\mu_\alpha}{\mathfrak{d}s}, \tag{39}$$

$\frac{\mathfrak{d}\mu_\alpha}{\mathfrak{d}s}$ steht auf $\mu_\alpha$ senkrecht; wir setzen $\frac{\mathfrak{d}\mu_\alpha}{\mathfrak{d}s} = \sigma\nu_\alpha$ und erhalten aus (39) wegen (9)

$$\frac{d\varphi}{ds} = \gamma - \sigma, \tag{40}$$

da $\mu_\alpha\eta^\alpha = -\sin\varphi$, $\nu_\alpha\xi^\alpha = \sin\varphi$ bei geeigneter Orientierung von $\boldsymbol{\mu}$ gilt. Andrerseits ist

$$\mu^1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}},\ \mu^2 = 0;\quad \nu_1 = 0,\ \nu_2 = \frac{1}{\sqrt{g^{22}}} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{11}}};$$

somit wird

$$\sigma = \nu^\alpha\frac{\mathfrak{d}\mu_\alpha}{\mathfrak{d}s} = \nu_\alpha\frac{\mathfrak{d}\mu^\alpha}{\mathfrak{d}s} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{11}}}\left\{\begin{matrix}1\,\alpha\\2\end{matrix}\right\}\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{du_\alpha}{ds} = \frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\left\{\begin{matrix}1\,\alpha\\2\end{matrix}\right\}\frac{du_\alpha}{ds}$$

und aus (40) folgt die Formel von DARBOUX

$$\gamma = \frac{d\varphi}{ds} + \frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\left\{\begin{matrix}1\,\alpha\\2\end{matrix}\right\}\frac{du_\alpha}{ds}. \tag{41}$$

## § 3. Geodätische Linien.

Unter den geodätischen Linien oder kurz *Geodätischen* einer Fläche versteht man die Flächenkurven mit der geodätischen Krümmung $\gamma = 0$. In der Ebene sind die Kurven verschwindender Krümmung die Geraden; wir werden sehen, daß die Geodätischen in vieler Hinsicht auf der Fläche eine ähnliche Rolle spielen wie die Geraden in der ebenen Geometrie. Enthält eine Fläche Gerade, so sind diese sicher Geodätische, wie aus (2, 20) unmittelbar zu entnehmen ist.

Aus (2, 20) ergibt sich auch eine geometrische Definition der nicht geradlinigen Geodätischen einer Fläche im euklidischen Raum: Ist $\varkappa \neq 0$, so muß

$\cos\vartheta = 0$, also $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ sein, d. h. aber: *Die Geodätischen sind jene Flächenkurven, deren Schmiegebenen in jedem Punkt P die Flächennormale enthalten.* Nach (2, 9) sind die Geodätischen die Integralkurven einer Differentialgleichung zweiter Ordnung und daraus folgt, daß durch jeden Punkt $P$ genau $\infty^1$ Geodätische gehen oder, daß durch ein Linienelement (Punkt und Richtung) eine Geodätische bestimmt ist.

Die Differentialgleichungen

$$\frac{\mathfrak{d}\,\xi^\alpha}{\mathfrak{d}\,s} = 0 \tag{1}$$

der Geodätischen, wie sie sich aus (2, 9) ergeben, lassen sich in der Form

$$\frac{\mathfrak{d}^2 u_\alpha}{\mathfrak{d}\,s^2} = 0 \tag{2}$$

oder ausführlich

$$u''_\alpha + \left\{ {\beta\gamma \atop \alpha} \right\} u'_\beta u'_\gamma = 0 \tag{3}$$

schreiben, wo die Striche gewöhnliche Ableitungen nach $s$ bedeuten. Aus (1) folgt, daß *die Tangentenvektoren einer Geodätischen untereinander parallel sind* (natürlich im Sinn von § 1). Man nennt deshalb die Geodätischen mitunter auch *autoparallele* Kurven.

*Die beiden Differentialgleichungen* (1) *sind nicht unabhängig voneinander,* sondern jede ist eine Folge der anderen. In der Tat folgt aus der Identität

$$g_{\alpha\beta} u'_\alpha u'_\beta = 1 \tag{4}$$

durch absolute Differentiation

$$g_{\alpha\beta} \frac{\mathfrak{d}^2 u_\alpha}{\mathfrak{d}\,s^2} u'_\beta = 0, \tag{5}$$

also eine Relation zwischen den beiden Größen (2) mit nicht durchwegs verschwindenden Koeffizienten (die Form (4) ist definit und $u'_\alpha \neq 0$).

Von der besonderen Art des Kurvenparameters $s$ kann man sich nun ohne Schwierigkeit freimachen. Führt man durch $t = t(s)$ einen beliebigen anderen zulässigen Parameter $t$ ein, und bezeichnet die Ableitungen nach $t$ durch Punkte, so folgt wegen

$$u'_\alpha = \dot{u}_\alpha t', \quad u''_\alpha = \ddot{u}_\alpha (t')^2 + \dot{u}_\alpha t'' \tag{6}$$

aus (3)

$$\ddot{u}_\alpha (t')^2 + \dot{u}_\alpha t'' + \left\{ {\varkappa\lambda \atop \alpha} \right\} \dot{u}_\varkappa \dot{u}_\lambda (t')^2 = 0 \tag{7}$$

und daraus durch Überschiebung mit $\varepsilon_{\alpha\beta}\,\dot{u}_\beta$ wegen $\varepsilon_{\alpha\beta}\,\dot{u}_\alpha\,\dot{u}_\beta = 0$ und $t' \neq 0$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\,\ddot{u}_\alpha\,\dot{u}_\beta + \varepsilon_{\alpha\beta} \left\{ {\varkappa\lambda \atop \alpha} \right\} \dot{u}_\beta\,\dot{u}_\varkappa\,\dot{u}_\lambda = 0. \tag{8}$$

Wir haben oben darauf hingewiesen, daß die Geodätischen einer Fläche in mancher Hinsicht dasselbe sind wie die Geraden einer Ebene. Eine fundamentale Eigenschaft der letzteren ist nun, daß sie stets die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei Punkten $P_0$ und $P_1$ der Ebene darstellen. Es liegt die Frage nahe, ob die Geodätischen einer Fläche auch diese Eigenschaft mit den Geraden gemeinsam haben.

Es seien also $P_0$ und $P_1$ zwei Punkte unserer Fläche; wir suchen eine $P_0$ mit $P_1$ verbindende Kurve $C$ mit der Parameterdarstellung

$$u_\alpha = u_\alpha(s), \tag{9}$$

wo $s$ die Bogenlänge von $C$ ist, derart, daß die Länge des zwischen $P_0$ und $P_1$ gelegenen Bogens von $C$ kleiner ist als die Länge aller anderen, $P_0$ und $P_1$ verbindenden Kurvenbogen $\bar{C}$ einer gewissen „Umgebung" von $C$.[1]) Wir denken uns zu diesem Zweck die Kurve $C$ als Kurve $\varepsilon = 0$ in eine Schar

$$\bar{u}_\alpha = \bar{u}_\alpha(s, \varepsilon) \tag{10}$$

von Kurven $\varepsilon =$ konst. eingebettet, die alle die beiden Punkte $P_0$ und $P_1$ verbinden. Der Parameter $s$ ist natürlich nur auf $C\,(\varepsilon = 0)$ die Bogenlänge. Die Funktionen $\bar{u}_\alpha(s, \varepsilon)$ seien dabei zweimal, der Maßtensor $g_{\alpha\beta}$ einmal stetig differenzierbar. Sind $s_0$ und $s_1$ die bzw. $P_0$ und $P_1$ entsprechenden Werte von $s$, so muß also

$$\bar{u}_\alpha(s_0, \varepsilon) = \bar{u}_\alpha(s_0, 0) = u_\alpha(s_0), \quad \bar{u}_\alpha(s_1, \varepsilon) = \bar{u}_\alpha(s_1, 0) = u_\alpha(s_1) \tag{11}$$

und somit auch

$$\frac{\partial \bar{u}_\alpha(s_0, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}_\alpha(s_1, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = 0 \tag{12}$$

identisch in $\varepsilon$ gelten. Dann ist

$$S(\varepsilon) = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{g_{\alpha\beta}(\bar{u}) \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial s} \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial s}}\, d s \tag{13}$$

die Länge des von $P_0$ und $P_1$ begrenzten Bogens einer „*Vergleichskurve*" $\varepsilon =$ konst. der Schar (10). Eine notwendige, bekanntlich aber nicht hinreichende Bedingung dafür, daß die Kurve $C\,(\varepsilon = 0)$ die kürzeste Verbindungslinie der beiden Punkte darstellt, ist

$$\frac{dS(0)}{d\varepsilon} = 0. \tag{14}$$

Diese Extremumsaufgabe unterscheidet sich insofern ganz wesentlich von den in der elementaren Infinitesimalrechnung behandelten, als hier nicht

1) Unter der Umgebung einer Punktmenge $\mathfrak{M}$ (hier der Kurve $C$) versteht man eine Punktmenge $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ von der Eigenschaft, daß jeder Punkt von $\mathfrak{M}$ eine in $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ enthaltene Umgebung besitzt.

Werte irgendwelcher (unabhängiger) Veränderlichen, sondern zwei Funktionen $u_\alpha(s)$ gesucht sind, die die Funktion (13) zu einem Minimum machen. Man spricht von einem *Variationsproblem* (der Bogenlänge) und nennt die Lösungen $u_\alpha(s)$ von (14) seine *Extremalen.*[1]) Sicher sind alle kürzesten Verbindungslinien von $P_0$ und $P_1$ Extremalen des Variationsproblems (14), aber, wie schon erwähnt, die Umkehrung muß nicht gelten. Eine hinreichende Bedingung werden wir im folgenden Paragraphen angeben.

Wir formen die notwendige Bedingung (14) um. Deuten wir der Kürze halber Ableitungen nach $s$ durch Striche an, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} g_{\alpha\beta}(\bar{u})\, \bar{u}'_\alpha \bar{u}'_\beta = \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\varepsilon} g_{\alpha\beta}(\bar{u})\, \bar{u}'_\alpha \bar{u}'_\beta = 2 g_{\alpha\beta}(\bar{u}) \frac{\mathfrak{d}\bar{u}'_\alpha}{\mathfrak{d}\varepsilon} \bar{u}'_\beta .$$

Aus (13) folgt somit wegen

$$\frac{\mathfrak{d}\bar{u}'_\alpha}{\mathfrak{d}\varepsilon} = \frac{\mathfrak{d}^2 \bar{u}_\alpha}{\mathfrak{d}\varepsilon\,\mathfrak{d}s} = \frac{\partial^2 \bar{u}_\alpha}{\partial\varepsilon\,\partial s} + \begin{Bmatrix} \varkappa\lambda \\ \alpha \end{Bmatrix} \frac{\partial \bar{u}_\varkappa}{\partial s} \frac{\partial \bar{u}_\lambda}{\partial \varepsilon} = \frac{\mathfrak{d}^2 \bar{u}_\alpha}{\mathfrak{d}s\,\mathfrak{d}\varepsilon} = \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}s}\left(\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial \varepsilon}\right)$$

durch Differentiation nach $\varepsilon$[2])

$$\frac{dS(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\beta}(\bar{u})\,\bar{u}'_\alpha \bar{u}'_\beta}}\, g_{\alpha\beta}(\bar{u}) \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}s}\left(\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial \varepsilon}\right) \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial s}\, ds,$$

so daß für $\varepsilon = 0$

$$\frac{dS(0)}{d\varepsilon} = \int_{s_0}^{s_1} g_{\alpha\beta}(u) \frac{du_\beta}{ds} \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}s}\left(\frac{\partial \bar{u}_\alpha(s,0)}{\partial \varepsilon}\right) ds \tag{15}$$

wird. Durch partielle Integration[3]) ergibt sich weiter

$$\frac{dS(0)}{d\varepsilon} = \left[g_{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{u}_\alpha(s,0)}{\partial \varepsilon} \frac{du_\beta}{ds}\right]_{s_0}^{s_1} - \int_{s_0}^{s_1} g_{\alpha\beta} \frac{\mathfrak{d}^2 u_\beta}{\mathfrak{d}s^2} \frac{\partial \bar{u}_\alpha(s,0)}{\partial \varepsilon}\, ds. \tag{16}$$

Der erste Bestandteil rechterhand verschwindet wegen (12); soll also (14) für alle Vergleichskurven (10), also für alle $\varepsilon$ gelten, so muß

$$g_{\alpha\beta} \frac{\mathfrak{d}^2 u_\beta}{\mathfrak{d}s^2} = 0 \tag{17}$$

---

1) Eine ausführliche Darstellung der Variationsrechnung folgt im zweiten Band, V.

2) Die Differentiation unter dem Integralzeichen ist wegen unserer Voraussetzungen natürlich erlaubt.

3) Es ist allgemein

$$\int_a^b \mathfrak{d}(U^\alpha V_\alpha) = \int_a^b d(U^\alpha V_\alpha) = [U^\alpha V_\alpha]_a^b = \int_a^b V_\alpha\, \mathfrak{d}U^\alpha + \int_a^b U^\alpha\, \mathfrak{d}V_\alpha,$$

so daß *die gebräuchliche Formel für die partielle Integration auch für Überschiebungen und vor allem auch für absolute Differentiale gilt.*

sein, woraus wegen $g = |g_{\alpha\beta}| > 0$ (System linearer homogener Gleichungen mit nichtverschwindender Determinante) sofort

$$\frac{\mathfrak{d}^2 u_\beta}{\mathfrak{d} s^2} = 0 \tag{18}$$

oder ausführlicher

$$u_\beta'' + \left\{ {\varkappa\lambda \atop \beta} \right\} u_\varkappa' u_\lambda' = 0 \tag{19}$$

folgt, was mit (3) übereinstimmt. *Die Extremalen des Variationsproblems* (14) *der Bogenlänge sind also die Geodätischen; die kürzeste Verbindungslinie zweier Flächenpunkte — falls es überhaupt eine solche gibt — ist jedenfalls eine Geodätische.*

Aus (19) folgt durch Überschiebung mit $g_{\alpha\beta}$ die manchmal nützliche Form

$$g_{\alpha\beta} u_\beta'' + \left[ {\varkappa\lambda \atop \alpha} \right] u_\varkappa' u_\lambda' = 0 \tag{20}$$

der Differentialgleichung der Geodätischen.

Wir wiederholen, daß durch ein Linienelement (Punkt und Richtung) auf der Fläche eine Geodätische eindeutig bestimmt ist; aus der Theorie der Differentialgleichungen ist bekannt, daß die $u_\alpha$ längs der Geodätischen stetige und stetig differenzierbare Funktionen der Bogenlänge $s$ und der Anfangswerte $\overset{0}{u}_\alpha$ und $\overset{0}{u}{}_\alpha'$, der Bestimmungsstücke des Linienelementes, sind.

## § 4. Fortsetzung. Riemanns Normalkoordinaten.

Unter einem *Feld* verstehen wir eine einparametrige Kurvenschar auf einer Fläche, die einen Bereich $B$ der Fläche schlicht, d. h. so überdeckt, daß durch jeden Punkt $P$ von $B$ eine und nur eine Kurve der Schar hindurchgeht. Zwei Kurven der Schar schneiden sich dann in $B$ nicht, wenn sie nicht überhaupt miteinander identisch sind.

Wir betrachten ein Feld geodätischer Linien sowie ihre orthogonalen Trajektorien und fragen uns nach der Gestalt der ersten Grundform, wenn wir diese beiden Kurvenscharen zu Parameterlinien machen. Da sie ein orthogonales Netz bilden, ist jedenfalls $g_{12} = 0$, also

$$ds_2 = g_{11}\, du_1^2 + g_{22}\, du_2^2. \tag{1}$$

Die Bezeichnung sei so gewählt, daß die 1-Linien, d. h. die Kurven $u_2 =$ konst. die Geodätischen sind. Für ihre geodätische Krümmung, die voraussetzungsgemäß verschwindet, ergibt sich wegen

$$\nabla u_2 = g^{22} = \frac{1}{g_{22}}$$

aus (2, 38)

(2)
$$\gamma = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\frac{\partial\sqrt{g_{11}}}{\partial u_2};$$

also ist

(3)
$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} = 0,$$

d. h. $g_{11}$ ist eine Funktion von $u_1$ allein. Wir setzen

(4)
$$u = \int\sqrt{g_{11}}\,du_1, \quad v = u_2, \quad G = g_{22}$$

und erhalten in den neuen Parametern $u, v$, aus (1)

(5)
$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2,$$

eine für ein Feld geodätischer Linien und ihre orthogonalen Trajektorien charakteristische Form des quadrierten Bogenelements; man überzeugt sich nämlich leicht, daß auch umgekehrt aus (5) folgt, daß die Kurven $v =$ konst. Geodätische, die Kurven $u =$ konst. ihre orthogonalen Trajektorien sind und $u$ die Bogenlänge auf den Kurven $v =$ konst. ist.

Es sei $v = v_0$ ein durch die Kurven $u = u_0$ und $u = u_1$ begrenzter, ganz im Feld verlaufender geodätischer Bogen. Seine Länge $l$ wird wegen (5)

(6)
$$l = \int_{u_0}^{u_1} du = u_1 - u_0,$$

ist also von $v$ unabhängig. Es folgt:

*Die auf den Geodätischen eines Feldes von zwei orthogonalen Trajektorien ausgeschnittenen Bogen sind alle gleich lang.* Oder:

*Zieht man auf einer Fläche alle geodätischen Linien, die eine gegebene Kurve C senkrecht durchsetzen, und trägt auf ihnen nach derselben Seite Bogen fester, hinreichend kleiner*[1]) *Länge ab, so erfüllen die Endpunkte dieser Bogen eine Kurve, die alle Geodätischen senkrecht schneidet.*

Unsere Parameter $u, v$ heißen *geodätische Parallelkoordinaten* auf der Fläche; allgemein nennt man je zwei orthogonale Trajektorien eines geodätischen Feldes *geodätisch parallel.* Natürlich hat dieser Begriff paralleler Kurven nichts mit der Parallelverschiebung von § 1 zu tun.

Es sei ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß die Möglichkeit, geodätische Parallelkoordinaten einzuführen, von der Existenz eines Feldes abhängt und sich nur auf den durch das Feld gegebenen Bereich erstreckt. Nur für den Fall einer Fläche mit nirgends positiver Krümmung lassen sich weitgehende Aussagen über die Existenz geodätischer Felder machen, worauf wir in § 5 zurückkommen werden.

1) Man muß innerhalb eines Feldes bleiben.

Aus der obigen Herleitung der Form (5) des quadrierten Bogenelementes entnimmt man leicht *eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Schar $\varphi(u_1, u_2) = $ konst., wo $\varphi$ mindestens einmal stetig differenzierbar ist, aus geodätisch parallelen Kurven besteht.* Macht man nämlich die Kurven $\varphi =$ konst. und ihre orthogonalen Trajektorien $\psi(u_1, u_2) =$ konst. (die dann notwendig Geodätische sind) zu Parameterlinien, so wird wie in (1)

$$ds^2 = E\,d\varphi^2 + G\,d\psi^2.$$

Wegen $\nabla\varphi = \frac{1}{E}$ und (3) lautet die gesuchte Bedingung

$$\nabla\varphi = f(\varphi)$$

(d. h. $\nabla\varphi$ ist gleich einer Funktion von $\varphi$ allein). *Ist insbesondere*

$$\nabla\varphi = 1, \tag{7}$$

*so bedeutet $\varphi$ die auf den orthogonalen Geodätischen gemessene Bogenlänge und umgekehrt.*

Wir sind nun auch in der Lage, hinreichende Bedingungen dafür anzugeben, daß ein geodätischer Bogen die kürzeste Verbindung seiner Endpunkte ist. Wir legen wieder unsere geodätischen Parallelkoordinaten zugrunde und betrachten zwei Punkte $(u_0, v_0)$ und $(u_1, v_0)$, deren verbindender geodätischer Bogen $v = v_0$ ganz im Feld liegt. Ferner sei $v = v(u)$ eine stetig differenzierbare Kurve, die durch die beiden Punkte so hindurchgeht, daß der zwischen ihnen liegende Bogen ebenfalls ganz im Feld verläuft. Die Länge $L$ dieses Bogens ist dann

$$L = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{1 + G\left(\frac{dv}{du}\right)^2}\,du;$$

wegen $G > 0$ und (6) gilt

$$L \geqq l = u_1 - u_0, \tag{8}$$

und zwar ist dann und nur dann $L = l$, wenn zwischen den beiden Punkten $v(u) = v_0$ ist, die Kurve also dort mit dem geodätischen Bogen übereinstimmt. Also:

*Läßt sich ein geodätischer Bogen in ein Feld einbetten, so ist er, verglichen mit allen anderen innerhalb des Feldes verlaufenden Kurven, die kürzeste Verbindungslinie seiner Endpunkte.*

Von der Notwendigkeit der beiden Bedingungen überzeugt man sich leicht mittels geeigneter Beispiele. Betrachten wir zunächst eine Kugel. Auf ihr sind die Geodätischen die Hauptkreise. Durch je zwei nicht diametral gegenüberliegende Punkte $P$ und $Q$ geht ein und nur ein Hauptkreis. Aber nur der kleinere der beiden, durch $P$ und $Q$ bestimmten Hauptkreisbogen ist die

kürzeste Verbindung von $P$ und $Q$, und auch nur dieser läßt sich in ein Feld einbetten. Als zweites Beispiel nehmen wir einen Kreiszylinder. Die Geodätischen sind die Erzeugenden und die Schraubenlinien. Betrachten wir zwei Punkte $P$ und $Q$ einer Erzeugenden $g$. Neben der von $P$ und $Q$ bestimmten Strecke von $g$ sind auch alle Schraubenlinien, die sich zwischen $P$ und $Q$ einmal, zweimal usw. um den Zylinder herumwinden, als kürzeste Verbindungslinien der beiden Punkte anzusehen, aber nur im Vergleich zu Kurven in genügend kleiner Umgebung, die sich also ebenfalls bzw. einmal, zweimal usw. um den Zylinder herumwinden.

In der (euklidischen) Ebene sind die Geraden stets — ohne Einschränkung — die kürzesten Verbindungslinien zweier Punkte. In der Tat läßt sich jede Strecke beliebiger Länge in ein Feld einbetten, wobei das Feld aus allen zu der Strecke parallelen Geraden besteht und die ganze Ebene überdeckt, so daß jede Kurve der Ebene als Vergleichskurve zulässig ist.

Die geodätischen Parallelkoordinaten sind wegen der einfachen Form (5) des quadrierten Bogenelements für manche Untersuchung recht zweckmäßig. Insbesondere erhält man für die Krümmung $K$ aus (V, 4, 28) den besonders einfachen Ausdruck

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}. \tag{9}$$

Wir wenden uns nun zu einer Modifikation der geodätischen Parallelkoordinaten und betrachten die von einem Flächenpunkt $P$ ausgehenden Geodätischen. Es existiert dann eine Umgebung $U$ von $P$, so daß die Geodätischen durch $P$ in $U$ mit alleiniger Ausnahme des Punktes $P$ ein Feld bilden. Wir machen diese Geodätischen und ihre orthogonalen Trajektorien zu Parameterkurven $u$, $v$, und zwar so, daß $u$ die auf den Geodätischen von $P$ aus gemessene Bogenlänge und $v$ der Winkel ist, den diese Geodätischen mit einer festen Richtung in $P$ einschließen. Man spricht dann von *geodätischen Polarkoordinaten*. Das quadrierte Bogenelement hat offenbar wieder die Form (5), doch hat die Funktion $G(u, v)$ in $P$ noch gewisse Bedingungen zu erfüllen. In der Nähe von $P$ verhalten sich diese Koordinaten in erster Annäherung wie die gewöhnlichen Polarkoordinaten in der Ebene[1]), für die das quadrierte Bogenelement die Form

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 \tag{10}$$

1) Diese Ausnahme, d. h. genauer die im folgenden hergeleitete Form (17) von $G$ ist äquivalent mit der Annahme, daß in den Normalkoordinaten (18) die $g_{\alpha\beta}$ in $P$ *eindeutig* bestimmt sind. In der Tat folgt aus (18)

$$u\,dv = -\sin v\,dp + \cos v\,dq$$
$$du = \cos v\,dp + \sin v\,dq,$$

hat. Es muß also $G$ jedenfalls die Form

(11) $$G = u^2[1 + g(u, v)]$$

mit $\lim_{u \to 0} g(u, v) = 0$ haben. Daraus folgt

(12) $$\lim_{u \to 0} G = 0$$

und

(13) $$\lim_{u \to 0} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 1.$$

Aus (9) oder $$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = -K\sqrt{G}$$

ergibt sich ferner wegen (12)

(14) $$\lim_{u \to 0} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = 0$$

und

(15) $$\lim_{u \to 0} \frac{\partial^3 \sqrt{G}}{\partial u^3} = -\lim_{u \to 0} K = -K_0.$$

Also ist

(16) $$\sqrt{G} = u - \frac{K_0 u^3}{6} + \varphi(u, v)$$

bzw.

(17) $$G = u^2 - \frac{K_0 u^4}{3} + \psi(u, v),$$

wobei $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ für $u \to 0$ von höherer als dritter, bzw. von höherer als vierter Ordnung verschwinden.

---

so daß sich aus (5)

$$ds^2 = (\cos v\, dp + \sin v\, dq)^2 + \frac{G}{u^2}(\sin v\, dp - \cos v\, dq)^2$$

ergibt. Somit ist

(I) $$\begin{cases} g_{11} = \cos^2 v + \dfrac{G}{u^2}\sin^2 v, \\ g_{12} = \sin v \cos v\left(1 - \dfrac{G}{u^2}\right), \\ g_{22} = \sin^2 v + \dfrac{G}{u^2}\cos^2 v. \end{cases}$$

Sei nun $\lim_{u \to 0} \frac{G}{u^2} = \lambda(v)$. In $P\,(u = 0)$ sind die $g_{\alpha\beta}$ nach Voraussetzung eindeutig, also unabhängig von $v$. Wir setzen $g_{\alpha\beta}(0, v) = \mathring{g}_{\alpha\beta}$. Dann ist nach (I)

$$\lambda(v) = \frac{\mathring{g}_{11} - \cos^2 v}{\sin^2 v} = 1 - \frac{\mathring{g}_{12}}{\sin v \cos v} = \frac{\mathring{g}_{22} - \sin^2 v}{\cos^2 v}.$$

Daraus folgt aber sofort $\mathring{g}_{11} = \mathring{g}_{22} = 1$, $\mathring{g}_{12} = 0$ und $\lambda(v) = 1$. Also ist $\lim_{u \to 0} \frac{G}{u^2} = 1$ und $G$ hat die Form (11), aus der sich ja alles folgende ganz zwangläufig ergibt.

Für diese geodätischen Polarkoordinaten ist der Punkt $P$ singulär; setzen wir aber

$$p = u \cos v, \quad q = u \sin v, \tag{18}$$

so sind die dadurch eingeführten *Riemannschen Normalkoordinaten* $p, q$ *mit dem Zentrum* $P$ auch in $P$ selbst regulär. Aus (18) folgt

$$u = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad v = \operatorname{arc\,tan} \frac{q}{p} \tag{19}$$

und

$$du = \frac{p\,dp + q\,dq}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \quad dv = \frac{p\,dq - q\,dp}{p^2 + q^2}; \tag{20}$$

für das quadrierte Bogenelement in den Normalkoordinaten $p, q$ erhält man aus (5) wegen (17) und (20)

$$ds^2 = dp^2 + dq^2 + \frac{K_0}{3}(p\,dq - q\,dp)^2 + \chi(p, q)(p\,dq - q\,dp)^2, \tag{21}$$

wo $\chi(0, 0) = 0$ ist. Riemanns Normalkoordinaten verhalten sich also in der Nähe des Zentrums $P$, d. h. für kleine $p, q$ in erster Annäherung wie rechtwinklige kartesische Koordinaten.

Die Kurven $u =$ konst. der oben betrachteten geodätischen Polarkoordinaten heißen *geodätische Kreise.* Sie sind allgemein folgendermaßen definiert: Trägt man auf den Geodätischen durch einen Punkt $P$ Bogen fester, hinreichend kleiner Länge ab, so erhält man einen geodätischen Kreis.[1]) Geodätische Kreise sind stets geschlossene Kurven. Für den Umfang $U$ eines geodätischen Kreises $u = a$ erhält man wegen (16)

$$U = \int_0^{2\pi} \sqrt{G}\,dv = \int_0^{2\pi} \left[a - \frac{K_0 a^3}{6} + \varphi(a, v)\right] dv = 2a\pi - \frac{K_0 a^3 \pi}{3} + \Phi. \tag{22}$$

Daraus ergibt sich unmittelbar eine von Puiseux und Bertrand angegebene Formel für die Krümmung $K_0$

$$K_0 = \lim_{a \to 0} \frac{3(2a\pi - U)}{a^3 \pi}. \tag{23}$$

1) Häufig werden auch die Kurven konstanter geodätischer Krümmung als geodätische Kreise (*Krümmungskreise*) bezeichnet; sie sind im allgemeinen von den oben betrachteten Kurven (den *Entfernungskreisen*) verschieden.

## § 5. Die Formel von Gauß-Bonnet und die Gesamtkrümmung einer Fläche.[1])

Es sei auf einer Fläche mit zweimal stetig differenzierbarem Maßtensor eine geschlossene, ecken- und doppelpunktfreie, sowie zweimal stetig differenzierbare Kurve $C$ gegeben, die ein einfach zusammenhängendes Gebiet $G$ berandet.[2]) Die Flächenparameter $u_\alpha$ deuten wir zugleich als rechtwinklige Koordinaten in einer Ebene[3]); die Bezeichnung sei dabei so gewählt, daß die positive $u_1$-Achse durch eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$ im positiven Sinn, d. h. entgegen dem Uhrzeiger, mit der positiven $u_2$-Achse zur Deckung kommt. Die Kurve $C$ sei so orientiert, daß das Gebiet $G$ bei einem Umlauf im positiven Sinn zur linken liegt (Fig. 10).

Fig. 10.

Wir benützen nun die Darstellungen (2, 14) der Vektoren $\xi$ und $\eta$ des begleitenden Zweibeins von $C$. Das zur Darstellung verwendete Zweibein ${}_{(\varkappa)}\lambda$ sei dabei in allen Punkten eines Bereiches, der das Gebiet $G$ ganz enthält, definiert und stetig differenzierbar. Seine Orientierung sei so gewählt, daß

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\,{}_{(1)}\lambda^\alpha\,{}_{(2)}\lambda^\beta = +1 \tag{1}$$

ist (es ist dann ebenso orientiert, wie die beiden Vektoren $(du_1, 0)$ und $(0, du_2)$). Das Vorzeichen der geodätischen Krümmung $\gamma$ von $C$ wählen wir schließlich so, daß das begleitende Zweibein von $C$ dieselbe Orientierung hat wie das Zweibein ${}_{(\varkappa)}\lambda$. Die Transformationsmatrix

$$\begin{Vmatrix} {}_{(1)}\xi & {}_{(2)}\xi \\ {}_{(1)}\eta & {}_{(2)}\eta \end{Vmatrix} \tag{2}$$

des Systems $\xi^\alpha = {}_{(\varkappa)}\xi\,{}_{(\varkappa)}\lambda^\alpha$, $\eta^\alpha = {}_{(\varkappa)}\eta\,{}_{(\varkappa)}\lambda^\alpha$ ist dann eigentlich orthogonal, d. h. ihre Determinante hat den Wert $+1$; das begleitende Zweibein von $C$ ist ebenso orientiert wie die Vektoren $(du_1, 0)$, $(0, du_2)$, und die Normale von $C$ weist daher in das Innere von $G$.

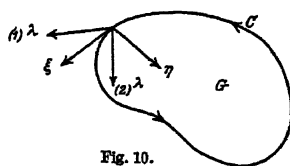
Ist $\varphi$ der in der Metrik der Fläche gemessene Winkel, um den im *negativen* Sinn, d. h. mit dem Uhrzeiger, der Vektor $\xi$ zu drehen ist, bis er mit ${}_{(1)}\lambda$ zur Deckung kommt, so gilt, da ${}_{(1)}\xi = \xi^\alpha\,{}_{(1)}\lambda_\alpha = \cos\varphi$ ist, für die Matrix (2)

$${}_{(1)}\xi = \cos\varphi, \quad {}_{(2)}\xi = \sin\varphi; \quad {}_{(1)}\eta = -\sin\varphi, \quad {}_{(2)}\eta = \cos\varphi. \tag{3}$$

---

1) Der im folgenden gegebene Beweis der Formel von Gauss-Bonnet rührt ebenso wie die vorbereitenden Formeln [insbesondere (V, 2, 22) bis (V, 2, 30) und (V, 3, 19) bis (V, 3, 25)] von W. Mayer her.

2) Ein Gebiet heißt einfach zusammenhängend, wenn es durch jeden Querschnitt, d. h. durch jede am Rand beginnende und ebendort endende stetige, doppelpunktfreie Kurve in zwei getrennte Teile zerlegt wird.

3) Vgl. die Anmerkung auf S. 115.

Trägt man diese Größen in die Frenetformeln (2, 15) ein, so folgt

$$\varphi' + {}_{(12)}C_\alpha u'_\alpha = \gamma. \tag{4}$$

Unter den angegebenen Voraussetzungen gilt für zwei beliebige, stetig differenzierbare Funktionen ${}_{(12)}C_\alpha$

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial\,{}_{(12)}C_2}{\partial u_1} - \frac{\partial\,{}_{(12)}C_1}{\partial u_2}\right) du_1\, du_2 = \int\limits_C {}_{(12)}C_1\, du_1 + {}_{(12)}C_2\, du_2. \tag{4'}$$

Haben die ${}_{(12)}C_\alpha$ insbesondere dieselbe Bedeutung wie in (V, 2, 23), so folgt aus (V, 4, 20)

$$-\iint\limits_G K\sqrt{g}\, du_1\, du_2 = -\iint\limits_G K\, do = \int\limits_C {}_{(12)}C_\alpha\, du_\alpha, \tag{5}$$

wo

$$do = \sqrt{g}\, du_1\, du_2 \tag{6}$$

das Oberflächenelement der Fläche ist. Wegen (4) ergibt sich nun weiter die *Formel von Gauß-Bonnet*

$$\iint\limits_G K\, do = 2\pi - \int\limits_C \gamma\, ds. \tag{7}$$

Es ist noch zu zeigen, daß bei der Integration um $C$: $\int d\varphi = 2\pi$ ist, d. h. daß die Tangente von $C$ sich bei einem Umlauf gerade einmal dreht. In der Parameterebene betrachten wir neben der Metrik der Fläche, die durch den Maßtensor $g_{\alpha\beta}$ bestimmt ist, noch eine euklidische Maßbestimmung und beweisen unseren Satz zunächst für diese. Zu diesem Zweck approximieren wir die Kurve $C$ durch eine Folge von (etwa eingeschriebenen) Polygonen. Diese Polygone lassen sich nach unseren Voraussetzungen über die Randkurve $C$ stets so wählen, daß je zwei Seiten höchstens einen Eckpunkt gemeinsam haben, d. h. daß sie keine „überworfenen" Polygone sind. Die Summe der Außenwinkel solcher Polygone ist aber stets gleich $2\pi$ und geht im Grenzfalle in den gesuchten Winkel über, um den sich die Tangente von $C$ bei einem Umlauf dreht; dieser Winkel ist somit, wie behauptet, ebenfalls gleich $2\pi$.

Wir verfolgen nun weiter das Zweibein ${}_{(\alpha)}\lambda$ (immer in der Parameterebene) bei einem Umlauf um $C$ und zeigen, daß der euklidisch gemessene Winkel $\psi$, den etwa der Vektor ${}_{(1)}\lambda$ mit einer festen Richtung $\mu$ einschließt, bei diesem, in einem Punkt $P$ von $C$ beginnenden und in $P$ wieder endenden Umlauf keinen Zuwachs erfährt. Wir betten $C$ in eine einparametrige Schar ähnlicher Kurven mit dem Ähnlichkeitszentrum $P$ ein. Sei $\lambda$ der Scharparameter, so daß $\lambda = 1$ die Kurve $C$ und $\lambda = 0$ der Punkt $P$ ist. Man überlegt nun leicht, daß die Änderung von $\psi$ bei einem Umlauf um eine Kurve dieser

Schar eine *stetige* Funktion $\Psi(\lambda)$ von $\lambda$ ist. Da aber der Wertevorrat dieser Funktion nur aus Vielfachen von $2\pi$ besteht, muß $\Psi(\lambda)$ konstant sein; da aber weiter $\Psi(\lambda)$ für $\lambda \to 0$ aus Stetigkeitsgründen den Wert Null hat, ist $\Psi(\lambda) = 0$ identisch in $\lambda$, w. z. b. w.

Da somit der euklidisch gemessene Zuwachs des Winkels zwischen $\xi$ und $\mu$ den Wert $2\pi$, der euklidisch gemessene Zuwachs des Winkels zwischen ${}_{(1)}\lambda$ und $\mu$ den Wert Null hat, beträgt der Zuwachs des Winkels $\varphi$ zwischen $\xi$ und ${}_{(1)}\lambda$ ebenfalls $2\pi$, und zwar sowohl in euklidischer Metrik als auch in der der Fläche.[1])

Die Formel (7) gilt zunächst unter der Voraussetzung, daß das Vorzeichen von $\gamma$ entsprechend der obigen Festsetzung gewählt ist und daß außerdem wachsenden Werten von $s$ der positive Durchlaufungssinn von $C$, d. h. jener entspricht, bei dem das Gebiet $G$ zur Linken liegt. Führen wir aber durch $\bar{s} = -s$ die entgegengesetzt gemessene Bogenlänge auf $C$ ein, so ist

$$\bar{\xi}^\alpha = -\xi^\alpha, \tag{8}$$

aber

$$\frac{\mathfrak{d}\bar{\xi}^\alpha}{\mathfrak{d}\bar{s}} = \frac{\mathfrak{d}\xi^\alpha}{\mathfrak{d}s}. \tag{9}$$

Bei dieser Parametertransformation bleibt also $\gamma\eta^\alpha$ invariant und somit auch $\gamma$, wenn man $\bar{\eta}^\alpha = \eta^\alpha$ setzt. Der wachsenden Bogenlänge $\bar{s}$ entspricht aber auf $C$ jener Richtungssinn, bei dem $G$ zur Rechten liegt. Das Kurvenintegral auf der linken Seite von (7) bleibt somit ungeändert, wenn nur die Normale weiter in das Innere von $G$ gerichtet ist. *Also gilt* (7) *unter der alleinigen Voraussetzung, daß die Normale der Randkurve in das Innere des Integrationsgebietes $G$ weist.*

Mit der Formel von GAUSS-BONNET haben wir zum erstenmal die Fragestellungen der Geometrie im kleinen verlassen (vgl. I, § 2); in der Tat handelt es sich hier um eine Aussage über ein Gebiet von endlicher Ausdehnung. Bemerkt sei, daß der Ausdruck

$$\iint\limits_G K\,do \tag{10}$$

als *Gesamtkrümmung* oder *Curvatura integra* des Gebietes $G$ bezeichnet wird; die Formel von GAUSS-BONNET besagt also, daß sich die Gesamtkrümmung eines Flächenstückes unter gewissen Voraussetzungen auf die geodätische Krümmung der Randkurve zurückführen läßt.

Diese Voraussetzungen lassen sich noch erheblich einschränken. Betrachten wir zunächst ein Gebiet $G$, dessen Randkurve $C$ eine endliche Anzahl von Ecken $P_1, P_2, \ldots, P_n$ hat. Ist $\alpha_\nu$ $(-\pi \leqq \alpha_\nu \leqq +\pi)$ der auf der Fläche ge-

1) Einen etwas anderen Gedankengang entwickelt L. BIEBERBACH in seiner Besprechung des im Vorwort erwähnten Buches von CAMPBELL (Jahresber. der D. M.-V. 37, 1928, S. *102*).

messene Sprung, den der Winkel $\varphi$ in $P_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ macht, also als Winkel der beiden Tangentenvektoren in $P_\nu$ der *Außenwinkel* des (krummlinigen) Polygons $C$ in $P_\nu$, so ist

$$\int_C d\varphi = 2\pi - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \tag{11}$$

und wir erhalten aus (4) und (5) die allgemeinere Formel

$$\iint_G K\,do = 2\pi - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu - \int_C \gamma\,ds. \tag{12}$$

Eine weitere Voraussetzung, von der man sich befreien kann, ist die, daß das Gebiet $G$ ein einfach zusammenhängendes Parameterbild besitzt, d. h., daß sich eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $G$ auf einen einfach zusammenhängenden ebenen Bereich herstellen läßt.[1]) Da in die Formel (12) die Parameter selbst nicht eingehen, ist zu erwarten, daß diese Voraussetzung überflüssig ist. Wir betrachten zunächst ein Gebiet $G$, daß sich in zwei Stücke $G_1$ und $G_2$ zerlegen läßt, von denen sich jedes durch ein Parametersystem $u_\alpha$ auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet der $(u_1, u_2)$-Ebene abbilden läßt (Fig. 11). Dann ist

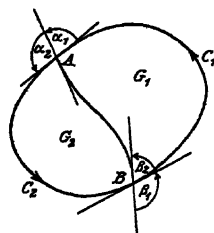



Fig. 11.

$$\iint_{G_1} K\,do = 2\pi - (\alpha_1 + \beta_1) - \int_{C_1} \gamma\,ds - \int_A^B \gamma\,ds \tag{13}$$

und

$$\iint_{G_2} K\,do = 2\pi - (\alpha_2 + \beta_2) - \int_{C_2} \gamma\,ds - \int_B^A \gamma\,ds. \tag{14}$$

Durch Addition folgt

$$\iint_G K\,do = 4\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2) - \int_C \gamma\,ds - \int_A^B \gamma\,ds - \int_B^A \gamma\,ds$$

oder wegen $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 = \pi$, $\int_A^B \gamma\,ds = -\int_B^A \gamma\,ds$ wieder die Formel (7). Es gilt also auch die Formel (12) ganz allgemein für jedes Gebiet $G$ mit $n$ Ecken, das sich in eine endliche Anzahl von Stücken derart zerlegen läßt, daß jedes einzelne Stück sich umkehrbar eindeutig auf einen einfach zusammenhängenden ebenen Bereich abbilden läßt.

Eine geschlossene Fläche vom Zusammenhang der Kugel zerfällt durch eine stetige, doppelpunktfreie geschlossene Kurve $C$ in zwei einfach zusammen-

1) Z. B. läßt sich schon die ganze Kugelfläche nicht umkehrbar eindeutig auf einen ebenen Bereich abbilden, wohl aber jeder Teil derselben (stereographische Projektion).

hängende Gebiete. Wendet man auf jedes die Formel von GAUSS-BONNET an und addiert, so fallen die über $C$ erstreckten Kurvenintegrale weg, da die Normale von $C$ bei den beiden Integrationen entgegengesetzt zu orientieren ist und es bleibt

$$\iint K\,do = 4\pi. \tag{15}$$

Allgemeiner gilt für eine geschlossene Fläche vom Geschlecht $p$[1])

$$\iint K\,do = 4\pi(1-p). \tag{16}$$

Die Gesamtkrümmung geschlossener Flächen hängt also nicht mehr von der Gestalt der Fläche, nicht einmal vom Maßtensor ab, sondern nur von der topologischen Invariante $p$.

Aus der Formel von GAUSS-BONNET lassen sich einige wichtige Folgerungen ziehen. Zunächst folgt aus (15):

*Es gibt keine Fläche vom Zusammenhang der Kugel mit nirgends positiver Krümmung.*

Für eine solche Fläche wäre ja wegen $K \leqq 0$ auch $\iint K\,do \leqq 0$, während rechts doch die positive Zahl $4\pi$ steht.

Wir betrachten nun Gebiete $G$, die von geodätischen Bogen $C$ berandet sind. Dann ist stets $\int\limits_C \gamma\,ds = 0$ und (12) wird zu

$$\iint\limits_G K\,do = 2\pi - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu. \tag{17}$$

Dabei ist jetzt $-\pi < \alpha_i < +\pi$, da sich zwei verschiedene Geodätische niemals berühren können. Die Fälle $n = 0, 1, 2$ sind deshalb auf Flächen mit nirgends positiver Krümmung nicht möglich; $n = 0$ heißt insbesondere:

*Auf Flächen mit nirgends positiver Krümmung gibt es keine geschlossenen Geodätischen.*

Als Gegenstück dazu erwähnen wir ohne Beweis den Satz:

*Auf einer Eifläche, d. h. auf einer Fläche mit nirgends negativer Krümmung, gibt es stets eine (wahrscheinlich sogar mindestens drei) geschlossene Geodätische.*[2])

Von allgemeinerem Interesse sind also erst *geodätische Dreiecke*. Bezeichnen wir mit $\beta_i = \pi - \alpha_i$ die Innenwinkel, so folgt aus (17)

$$\iint K\,do = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \pi. \tag{18}$$

Die Differenz rechterhand pflegt man als Exzeß des geodätischen Dreiecks zu bezeichnen; *die Gesamtkrümmung eines geodätischen Dreieckes ist gleich*

1) Vgl. etwa L. BIEBERBACH, *Lehrbuch der Funktionentheorie* II, S. 182ff.

2) Vgl. W. BLASCHKE, *Differentialgeometrie* I, S. 141.

*seinem Exzeß*. Wichtige Folgerungen aus diesem Resultat werden sich in VII, § 2 für Flächen konstanter Krümmung $K$ ergeben.

Wir sind auch in der Lage, unsere in § 4 gegebene Beantwortung der Frage, wann ein geodätischer Bogen die kürzeste Verbindung seiner Endpunkte ist, für Flächen mit nirgends positiver Krümmung erheblich zu verschärfen.[1])

Wir betrachten die von einem Punkt $P$ ausgehenden Geodätischen und zeigen zunächst, daß zu jedem Punkt $Q$ einer solchen eine Umgebung gehört, deren sämtliche Punkte gleichfalls auf Geodätischen durch $P$ liegen. Die Geodätischen durch $P$ hängen nach der Bemerkung am Schluß von § 3 stetig von der Ausgangsrichtung in $P$ ab, die wir durch den mit einer festen Richtung, etwa mit $(du_1, 0)$ eingeschlossenen Winkel $v$ festlegen. Auf den Geodätischen sei $u$ die von $P$ aus gemessene Bogenlänge; in $Q$ sei $u = u_0$ und die Geodätische $PQ$ habe in $P$ die Richtung $v = v_0$. Wir wählen eine Zahl $0 < \delta < |u_0|$ so, daß $Q$ dem Bogen $u_0 - \delta < u < u_0 + \delta$ von $v = v_0$ angehört, sowie eine weitere Zahl $0 < h < \pi$ und markieren auf den Geodätischen $v_0 - h < v < v_0 + h$ die Punkte $u = u_0 - \delta$ und $u = u_0 + \delta$. Diese Punkte erfüllen nach der eben erwähnten Bemerkung aus § 3 zwei stetige Kurven, die sich außerdem weder schneiden, noch Doppelpunkte aufweisen können, da sonst zwei der betrachteten Geodätischen neben $P$ einen weiteren Punkt gemeinsam haben, also ein geodätisches Zweieck bilden müßten, was nach einer oben gemachten Feststellung unmöglich ist. Die beiden Kurven bilden somit zusammen mit den Bogen $u_0 - \delta < u < u_0 + \delta$ auf den beiden Geodätischen $v = v_0 - h$ und $v = v_0 + h$ eine geschlossene stetige Kurve, die einen den Punkt $Q$ und die sämtlichen Bogen $u_0 - \delta < u < u_0 + \delta$ der Geodätischen $v_0 - h < v < v_0 + h$ enthaltenden Bereich umrandet. Dieser Bereich wird von jedem der genannten Bogen in zwei Teilbereiche zerlegt und von ihrer Gesamtheit schlicht und lückenlos überdeckt. Denn andernfalls sei $S$ ein nicht bedeckter Punkt des Bereiches, und $\bar{v}$ die obere Grenze derjenigen Werte $v = v_1$, für die $S$ in demjenigen Teilbereich liegt, an dessen Berandung die Bogen $u_0 - \delta < u < u_0 + \delta$ der beiden Geodätischen $v = v_1$ und $v = v_0 + h$ beteiligt sind. Dann muß aber $S$ auf der Geodätischen $v = \bar{v}$ liegen, da sonst aus Stetigkeitsgründen $\bar{v}$ nicht obere Grenze wäre. Damit ist aber die obige Behauptung bewiesen.

Es sei nun $R$ ein beliebiger, von $P$ verschiedener Punkt der Fläche. Wir verbinden $Q$ mit $R$ durch eine stetige Kurve, deren Parameter $t$ von 0 bis 1 wachsen möge, während sich ein Kurvenpunkt von $Q$ nach $R$ bewegt. Sei $t_0$ die obere Grenze derjenigen Werte von $t$, für die alle zu $0 \leqq t < t_0 \leqq 1$ gehörigen Kurvenpunkte mit $P$ geodätisch verbindbar sind. Dann ist aber auch

1) Der folgende Beweis ist entnommen aus L. BIEBERBACH, *Über Tchebychefsche Netze auf Flächen negativer Krümmung*, Sitzungsber. d. preuß. Akad. 1926, S. 294—321.

der zu $t = t_0$ gehörige Punkt aus Stetigkeitsgründen (d. h. wegen der schon wiederholt erwähnten Bemerkung aus § 3) mit $P$ geodätisch verbindbar und besitzt nach dem oben Bewiesenen eine Umgebung, deren sämtliche Punkte mit $P$ geodätisch verbindbar sind. Das widerspricht aber dem Begriff der oberen Grenze, so lange $t_0 < 1$ ist. Daher ist $t_0 = 1$ und auch $R$ mit $P$ geodätisch verbindbar. Damit ist gezeigt:

*Die von einem Punkt P einer nirgends positiv gekrümmten Fläche ausgehenden Geodätischen bedecken die ganze Fläche schlicht und lückenlos und bilden also auf der ganzen Fläche ein Feld, mit alleiniger Ausnahme des Punktes P selbst.* Als unmittelbare Folgerung ergibt sich:

*Je zwei Punkte der Fläche sind miteinander durch einen und nur einen geodätischen Bogen verbindbar, der zugleich die kürzeste Verbindungslinie der beiden Punkte ist.*

## § 6. Ergänzungen und Anwendungen.

**A. Eine Formel von Liouville für die Krümmung $K$.** Wir suchen uns zunächst aus (2, 33) Formeln für die geodätischen Krümmungen der Parameterlinien zu verschaffen. Wir haben dabei die Funktion $\varphi$ durch $u_\lambda$ zu ersetzen, wo aber der Index $\lambda$ hier und im folgenden nur ein reiner Numerationsindex ist, der *nicht* der Summationsvorschrift unterliegt. Die $u_\lambda$ sind als Invarianten, ihre Ableitungen $\frac{\partial u_\lambda}{\partial u_\alpha} = \delta_\alpha^\lambda$ für $\lambda = 1, 2$ als zwei kovariante Vektoren anzusehen. Es wird nach (V, 1, 22)

$$\text{(1)} \qquad \frac{\mathfrak{d}^2 u_\lambda}{\mathfrak{d} u_\alpha \, \mathfrak{d} u_\beta} = \frac{\mathfrak{d}\delta_\alpha^\lambda}{\mathfrak{d} u_\beta} = -\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \varkappa\end{Bmatrix} \delta_\varkappa^\lambda = -\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \lambda\end{Bmatrix}$$

und nach (2, 25)

$$\text{(2)} \qquad \nabla u_\lambda = g^{\alpha\beta} \delta_\alpha^\lambda \delta_\beta^\lambda = g^{\lambda\lambda}.$$

Also ist, wenn $\mu$ der von $\lambda$ verschiedene Index ist, die geodätische Krümmung der Kurve $u_\lambda =$ konst. oder $\mu$-Kurve

$$\text{(3)} \qquad \gamma_\mu = \frac{1}{\sqrt{(g^{\lambda\lambda})^3}} \varepsilon^{\alpha\varrho} \varepsilon^{\beta\sigma} \begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \lambda\end{Bmatrix} \delta_\varrho^\lambda \delta_\sigma^\lambda = \frac{1}{\sqrt{(g^{\lambda\lambda})^3}} \varepsilon^{\alpha\lambda} \varepsilon^{\beta\lambda} \begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \lambda\end{Bmatrix},$$

also insbesondere

$$\text{(4)} \qquad \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{(g^{22})^3}} \varepsilon^{\alpha 2} \varepsilon^{\beta 2} \begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ 2\end{Bmatrix} = \frac{1}{g\sqrt{(g^{22})^3}} \begin{Bmatrix}1\,1\\ 2\end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{(g_{11})^3}} \begin{Bmatrix}1\,1\\ 2\end{Bmatrix}$$

und analog

$$\text{(5)} \qquad \gamma_2 = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{(g_{22})^3}} \begin{Bmatrix}2\,2\\ 1\end{Bmatrix}.$$

Weiter ist nach (III, 2, 9)

$$\cos\vartheta = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}\,g_{22}}} \tag{6}$$

und somit

$$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{11}\,g_{22}}}, \tag{7}$$

wobei $\vartheta$ der von den Parameterlinien eingeschlossene Winkel ist. Durch Differentiation von (6) nach $u_2$ ergibt sich wegen (7)

$$\begin{aligned}\frac{\partial\cos\vartheta}{\partial u_2} &= -\sin\vartheta\,\frac{\partial\vartheta}{\partial u_2}\\ &= -\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\,\frac{\partial\vartheta}{\partial u_2} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\,\frac{\partial g_{12}}{\partial u_2} - \frac{g_{12}}{2\sqrt{g_{11}^3 g_{22}}}\,\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} - \frac{g_{12}}{2\sqrt{g_{11}g_{22}^3}}\,\frac{\partial g_{22}}{\partial u_2},\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vartheta}{\partial u_2} &= -\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u_2} - \frac{g_{12}}{2g_{11}}\,\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} - \frac{g_{12}}{2g_{22}}\,\frac{\partial g_{22}}{\partial u_2}\right)\\ &= -\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\begin{bmatrix}1\,2\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\,2\\1\end{bmatrix} - \frac{g_{12}}{g_{11}}\begin{bmatrix}1\,2\\1\end{bmatrix} - \frac{g_{12}}{g_{22}}\begin{bmatrix}2\,2\\2\end{bmatrix}\right).\end{aligned}$$

Führt man hier durch $\begin{bmatrix}\alpha\beta\\\gamma\end{bmatrix} = g_{\gamma\lambda}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\\lambda\end{Bmatrix}$ die Christoffelklammern zweiter Art ein, so erhält man nach einigen einfachen Umformungen

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial u_2} = -\sqrt{g}\left(\frac{1}{g_{11}}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} + \frac{1}{g_{22}}\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}\right) \tag{8}$$

oder wegen (5)

$$\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} = -\frac{\partial\vartheta}{\partial u_2} - \frac{\sqrt{g}}{g_{22}}\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix} = -\frac{\partial\vartheta}{\partial u_2} - \sqrt{g_{22}}\,\gamma_2,$$

während (4) auch

$$\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix} = \sqrt{g_{11}}\,\gamma_1$$

geschrieben werden kann. Setzen wir diese beiden Ausdrücke in (V, 4, 18) ein, so folgt unmittelbar die Formel von Liouville

$$K = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u_1\partial u_2} + \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\sqrt{g_{22}}\,\gamma_2\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\sqrt{g_{11}}\,\gamma_1\right)\right]. \tag{9}$$

Es seien nun unsere Parameter orthogonal, also $g_{12} = 0$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Aus (4) und (5), oder einfacher aus der Bonnetschen Formel (2, 38), erhält man dann

$$\gamma_1 = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\,\frac{\partial\sqrt{g_{11}}}{\partial u_2}, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\,\frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial u_1}; \tag{10}$$

andrerseits folgt aus (9) durch Ausführung der Differentiationen

$$K = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\,\frac{\partial\gamma_2}{\partial u_1} + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\,\frac{\partial\gamma_1}{\partial u_2} + \frac{\gamma_2}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\,\frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial u_1} + \frac{\gamma_1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\,\frac{\partial\sqrt{g_{11}}}{\partial u_2}$$

oder wegen (10)

$$K = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \gamma_2}{\partial u_1} + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \gamma_1}{\partial u_2} - \gamma_1^2 - \gamma_2^2. \tag{11}$$

Aus dieser Formel entnimmt man, *daß orthogonale Netze von Kurven, deren geodätische Krümmung innerhalb jeder Schar denselben konstanten Wert hat, nur auf Flächen konstanter negativer Krümmung $K$ möglich sind*, und *daß es orthogonale Netze von Geodätischen nur in euklidischen Ebenen* (im Sinn der RIEMANNschen Geometrie, also auch auf Torsen) *geben kann.*

**B. Die geodätische Torsion.** Wir denken uns unsere Fläche im euklidischen Raum eingebettet und berechnen die Torsion einer Geodätischen der Fläche, als Kurve des $R_3$ angesehen. Sei $u_\alpha = u_\alpha(s)$ die Parameterdarstellung der Geodätischen, bezogen auf ihre Bogenlänge $s$. Die kartesischen Komponenten des Tangentenvektors sind dann

$$\xi_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} u'_\alpha = x'_i, \tag{12}$$

wo die Striche wieder Ableitungen nach $s$ bedeuten. Der Hauptnormalenvektor ist nach Definition mit dem Normalenvektor der Fläche identisch, also

$$\eta_i = \nu_i, \tag{13}$$

woraus sich für den Binormalenvektor

$$\zeta_i = \varepsilon_{ikl}\, \xi_k\, \eta_l = \varepsilon_{ikl}\, x'_k\, \nu_l \tag{14}$$

ergibt. Die Torsion berechnen wir mittels der dritten Frenetformel (II, 2, 15). Wir erhalten durch Differentiation von (14)

$$\zeta'_i = -\tau \nu_i = \varepsilon_{ikl}\, x''_k\, \nu_l + \varepsilon_{ikl}\, x'_k\, \nu'_l \tag{15}$$

und daraus durch Überschiebung mit $\nu_i$

$$\tau = -\varepsilon_{ikl}\, \nu_i\, x'_k\, \nu'_l = \varepsilon_{ikl}\, x'_i\, \nu_k\, \nu'_l. \tag{16}$$

Durch Differentiation der symmetrischen Darstellung (III, 4, 25)

$$\nu_l = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{hjl} \frac{\partial x_h}{\partial u_\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial u_\beta} \tag{17}$$

erhalten wir ferner, wenn wir rechts wieder kovariante Ableitungen benützen,

$$\nu'_l = \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{hjl} \frac{\mathfrak{d}^2 x_h}{\mathfrak{d} u_\alpha \mathfrak{d} u_\gamma} \frac{\partial x_j}{\partial u_\beta} u'_\gamma. \tag{18}$$

Dieser Ausdruck, in (16) eingesetzt, gibt wegen (I, 5, 10), $\frac{\partial x_k}{\partial u_\beta} \nu_k = 0$ und $\frac{\partial x_i}{\partial u_\delta} \frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} = g_{\beta\delta}$

$$\tau = -\varepsilon^{\alpha\beta} g_{\beta\delta} \nu_k \frac{\mathfrak{d}^2 x_k}{\mathfrak{d} u_\alpha \mathfrak{d} u_\gamma} u'_\gamma u'_\delta \tag{19}$$

oder, wenn wir noch (V, 4, 8) und $\nu_k \nu_k = 1$ berücksichtigen,

$$\tau = -\varepsilon^{\alpha\beta} g_{\beta\delta} b_{\alpha\gamma} u_\gamma' u_\delta', \tag{20}$$

wofür man auch

$$\tau = \frac{\varepsilon^{\alpha\beta} g_{\alpha\gamma} b_{\beta\sigma} du_\gamma du_\sigma}{g_{\varkappa\lambda} du_\varkappa du_\lambda} \tag{21}$$

schreiben kann.

Dieser Ausdruck für die Torsion einer Geodätischen in einem Punkt $P(u_1, u_2)$ hängt nur vom Punkt $P$ und von der Richtung $du_1 : du_2$ in $P$ ab und kann somit allen Flächenkurven zugeordnet werden, die die Geodätische in $P$ berühren. Wir definieren:

*Die geodätische Torsion einer Flächenkurve in einem Punkt P ist die Torsion der Geodätischen, die die Kurve in P berührt, und somit durch die Formel* (21) *gegeben.*

Ausdrücklich bemerkt sei, daß die Begriffe der geodätischen Torsion und der geodätischen Krümmung durchaus nicht in einer analogen Beziehung zueinander stehen wie etwa die Krümmung einer Kurve zu ihrer Torsion; während die geodätische Torsion ein Begriff der Flächentheorie im euklidischen Raum ist, gehört der Begriff der geodätischen Krümmung der Geometrie auf der Fläche, also der Geometrie des Riemannschen $R_2$ an. Eine Analogie würde etwa bestehen, wenn die geodätische Krümmung als Krümmung der eine Flächenkurve berührenden Geodätischen (als Kurve des $R_3$ angesehen) definiert wäre.

Durch Vergleich von (21) mit (IV, 1, 18) ergibt sich unmittelbar eine neue Definition der Krümmungslinien einer Fläche:

*Die Krümmungslinien sind die Kurven verschwindender geodätischer Torsion.*

Weitere einfache Folgerungen aus (21) sind die beiden folgenden Sätze, von denen der eine die Umkehrung des anderen ist:

*Ist eine Flächenkurve zugleich Krümmungslinie und Geodätische, so ist sie eine ebene Kurve.*

*Jede ebene Geodätische ist zugleich Krümmungslinie.*

Zwischen der gewöhnlichen und geodätischen Torsion einer Flächenkurve $C$ in einem Punkt $P$ besteht ein einfacher Zusammenhang, den wir noch herleiten wollen. Wir kennzeichnen das begleitende Dreibein von $C$ (als Kurve des euklidischen Raumes) und ihre gewöhnliche Torsion durch Sterne und behalten die bisherigen Bezeichnungen für die $C$ in $P$ berührende Geodätische $G$ bei. Mit $\vartheta$ bezeichnen wir den Winkel zwischen der Hauptnormalen $\eta_i^*$ von $C$ und der Flächennormalen $\nu_i$ (die zugleich die Hauptnormale $\eta_i$ von $G$ ist), so daß

$$(22)\qquad \begin{cases} \eta_i^* = \nu_i \cos\vartheta + \zeta_i \sin\vartheta, \\ \zeta_i^* = -\nu_i \sin\vartheta + \zeta_i \cos\vartheta \end{cases}$$

ist. Aus

$$\cos\vartheta = \eta_i^* \nu_i$$

folgt durch Differentiation nach der Bogenlänge $s$ von $C$

$$-\sin\vartheta \frac{d\vartheta}{ds} = \eta_i^{*\prime} \nu_i + \eta_i^* \nu_i'$$

oder wegen (22), $\eta_i^{*\prime} = -\varkappa^* \xi_i^* + \tau^* \zeta_i^*$ [vgl. (II, 2, 15)] und $\xi_i^* \nu_i = \xi_i \nu_i = 0$

$$-\sin\vartheta \frac{d\vartheta}{ds} = -\tau^* \sin\vartheta + \zeta_i \nu_i' \sin\vartheta.$$

Aus (16) ergibt sich wegen (14)

$$\tau = -\varepsilon_{ikl} \nu_i x_k' \nu_l' = \varepsilon_{ikl} x_i' \nu_k \nu_l' = \zeta_i \nu_i'$$

und somit schließlich die (natürlich auch für $\vartheta = 0$ giltige) Relation

$$(23)\qquad \tau = \tau^* - \frac{d\vartheta}{ds}.$$

Daraus folgt, daß *bei allen Flächenkurven, deren Hauptnormalen unter einem festen Winkel gegen die Flächennormale geneigt sind, und nur bei diesen, die geodätische mit der gewöhnlichen Torsion übereinstimmt.* Diese Kurven genügen, wie sich der Leser selbst des näheren überlegen möge, so wie die Geodätischen, die sie ja als Sonderfall enthalten, einer Differentialgleichung, die mit Ausnahme des Falles $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, wo sich die *Asymptotenlinien* ergeben, von zweiter Ordnung ist.

**C. Ein Satz von Weingarten. Geodätische Kegelschnitte.** Es seien $C_1$ und $C_2$ zwei Flächenkurven, die nicht geodätisch parallel sind. Wir fragen uns nach der Gestalt des Maßtensors, wenn wir die zu $C_1$ und $C_2$ geodätisch parallelen Kurven zu Parameterlinien $u_1 =$ konst. bzw. $u_2 =$ konst. machen und $u_1$ und $u_2$ die auf den zu $C_1$ und $C_2$ orthogonalen Geodätischen gemessenen Bogenlängen bedeuten. Nach (4, 7) muß dann

$$(24)\qquad \nabla u_1 = \frac{g_{22}}{g} = 1, \quad \nabla u_2 = \frac{g_{11}}{g} = 1,$$

also

$$(25)\qquad g_{11} = g_{22} = g, \quad g_{12} = \sqrt{g(g-1)}$$

sein. Ist $\vartheta$ der Winkel der Parameterlinien, so ist nach (III, 2, 9)

$$(26)\qquad \cos\vartheta = \sqrt{\frac{g-1}{g}}, \quad \sin\vartheta = \frac{1}{\sqrt{g}}$$

und somit ergibt sich

$$(27)\qquad ds^2 = g\left(du_1^2 + 2\sqrt{\frac{g-1}{g}}\,du_1\,du_2 + du_2^2\right)$$
$$= \frac{1}{\sin^2\vartheta}\,(du_1^2 + 2\cos\vartheta\,du_1\,du_2 + du_2^2).$$

Wir führen nun die Parametertransformation

$$(28)\qquad u_1 = v_1 + v_2, \quad u_2 = v_1 - v_2$$

aus. Die Kurven $v_1 =$ konst. ($v_2 =$ konst.) sind dann die Örter aller Flächenpunkte, für die die Summe (Differenz) der auf der Fläche gemessenen Abstände von den Ausgangskurven $C_1$ und $C_2$ konstant ist. Unsere Überlegungen bleiben richtig, wenn wir die Kurven $C_1$ und $C_2$ auf Punkte zusammenschrumpfen lassen. Dann ist aber die eben angegebene Eigenschaft der Kurven $v_\alpha =$ konst. nichts anderes als eine Übertragung der elementaren Definition der Ellipsen und Hyperbeln auf eine beliebige Fläche. Man bezeichnet daher die Kurven $v_\alpha =$ konst. als *geodätische Kegelschnitte*, und zwar auch im Fall beliebiger Kurven $C_1$ und $C_2$. Das System geodätischer Kegelschnitte hat aber mit dem elementargeometrischen System konfokaler Kegelschnitte noch eine wichtige Eigenschaft gemeinsam. Es gilt nämlich *(Satz von Weingarten)*:

*Die Kurven $v_\alpha =$ konst. bilden ein orthogonales Netz.* Wir beweisen diesen Satz, indem wir das quadrierte Bogenelement für die Parameter $v_\alpha$ berechnen. Es ergibt sich

$$(29)\qquad ds^2 = \frac{2}{\sin^2\vartheta}\,[(1+\cos\vartheta)\,dv_1^2 + (1-\cos\vartheta)\,dv_2^2]$$

oder nach einer einfachen Umformung

$$(30)\qquad ds^2 = \frac{dv_1^2}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}} + \frac{dv_2^2}{\cos^2\frac{\vartheta}{2}}.$$

Die Richtigkeit des Satzes von Weingarten ist sowohl aus (29) wie auch aus (30) zu entnehmen (Verschwinden des Gliedes mit $dv_1\,dv_2$).

**D. Beltramis Konstruktion des Mittelpunktes der geodätischen Krümmung.** Es sei der Mittelpunkt $Q$ der geodätischen Krümmung einer Flächenkurve $C$ in einem Punkt $P$ von $C$ zu ermitteln. Man konstruiere die zu $C$ orthogonalen Geodätischen $G$ und jene Kurve $C'$, die durch $P$ hindurchgeht und deren Richtung überall zu den Richtungen der Geodätischen $G$ konjugiert ist. Dann sind die Erzeugenden der der Fläche längs $C'$ umschriebenen Torse Tangenten der Geodätischen $G$. Sei $C''$ die Gratlinie dieser Torse und $t$ die durch $P$ gehende Erzeugende. Dann ist $Q$ der Berührungspunkt von $t$ mit $C''$.

Zum Beweis führen wir geodätische Parallelkoordinaten $u$, $v$ ein, so daß $C$ die Kurve $u = 0$, $P$ der Punkt $(0, 0)$, die Geodätischen $G$ die Kurven $v =$ konst. und $u$ ihre Bogenlänge ist. Dann ist das quadrierte Bogenelement durch (4, 5) gegeben und für die geodätische Krümmung von $C$ (und damit aller Kurven $u =$ konst.) folgt aus (2, 38)

$$\gamma = -\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}. \tag{31}$$

Die Kurve $C'$ sei gegeben durch $v = \varphi(u)$ mit $\varphi(0) = 0$. Dann ist der Ortsvektor von $C''$

$$y_i(u) = x_i(u, \varphi) + \lambda(u)\frac{\partial x_i(u, \varphi)}{\partial u}. \tag{32}$$

Dabei ist $\lambda$ der Abstand entsprechender Punkte von $C'$ und $C''$. Für den Tangentenvektor von $C''$ gilt dann $(\sigma \neq 0)$

$$\frac{d y_i}{d u} = \frac{\partial x_i}{\partial u} + \frac{\partial x_i}{\partial v}\varphi' + \lambda\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial v}\varphi'\right) + \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{d\lambda}{du} = \sigma\frac{\partial x_i}{\partial u}.$$

Wegen $\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v} = 0$, $\frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial x_i}{\partial v} = G$, $\frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2}\frac{\partial x_i}{\partial v} = 0$, $\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial x_i}{\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}$ folgt daraus durch Überschiebung mit $\frac{\partial x_i}{\partial v}$

$$\left(G + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)\varphi' = 0$$

und somit gilt, da jedenfalls $\varphi'(0) \neq 0$ ist, im Punkte $P$ in der Tat $\lambda(0) = \frac{1}{\gamma}$, w. z. b. w.

**E. Liouvillesche Flächen.** Man bezeichnet damit eine Klasse von Flächen, auf denen sich isotherme Parameter (vgl. III, § 7) so einführen lassen, daß das quadrierte Bogenelement die besondere Form

$$d s^2 = (f_1 + f_2)\,(d u_1^2 + d u_2^2) \tag{33}$$

annimmt, wobei $f_1$ eine Funktion von $u_1$ allein, $f_2$ eine Funktion von $u_2$ allein ist. Setzen wir

$$v_1 = \int \sqrt{f_1}\, d u_1, \quad v_2 = \int \sqrt{f_2}\, d u_2 \tag{34}$$

und

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{\sqrt{f_1}}{\sqrt{f_1 + f_2}}, \quad \cos\frac{\vartheta}{2} = \frac{\sqrt{f_2}}{\sqrt{f_1 + f_2}}, \tag{35}$$

so erhält man nach einfacher Rechnung genau die Form (30) des quadrierten Bogenelementes. Es gilt also *(Satz von Dini):*

*Die Liouvilleschen Flächen haben die charakteristische Eigenschaft, daß auf ihnen ein isometrisches Netz geodätischer Kegelschnitte existiert.* Offenbar führt ja die Transformation (34) die isothermen Parameter $u_\alpha$ in isometrische $v_\alpha$ über.

Eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft der LIOUVILLEschen Flächen ist die, *daß sich ihre Geodätischen durch Quadraturen bestimmen lassen.* Wir gehen zum Nachweis dieser Behauptung von der Differentialgleichung (3, 8) der Geodätischen aus und berechnen uns zunächst die Christoffelklammern (für die Parameter $u_\alpha$). Wegen

$$g_{11} = g_{22} = f_1 + f_2, \quad g_{12} = 0, \quad g = (f_1 + f_2)^2,$$

$$g^{11} = g^{22} = p, \; g^{12} = 0,$$

wo

$$p = \frac{1}{f_1 + f_2} \tag{36}$$

gesetzt ist, erhält man aus (V, 1, 28)

$$\begin{bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} f_1', \quad \begin{bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} f_2'$$

und aus (V, 1, 13)

$$\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} p f_1', \quad \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} p f_2'.$$

Aus (3, 8) ergibt sich somit die gesuchte Differentialgleichung der Geodätischen

$$\dot{u}_1 \ddot{u}_2 - \dot{u}_2 \ddot{u}_1 + \frac{\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2}{2(f_1 + f_2)} (f_1' \dot{u}_2 - f_2' \dot{u}_1) = 0. \tag{37}$$

Man rechnet nun leicht nach, daß man diese Gleichung auch in der Form

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f_1 \dot{u}_2^2}{\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2} - \frac{f_2 \dot{u}_1^2}{\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2}\right) = 0 \tag{38}$$

schreiben kann, so daß man sofort das Zwischenintegral

$$\frac{f_1 \dot{u}_2^2}{\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2} - \frac{f_2 \dot{u}_1^2}{\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2} = a \tag{39}$$

mit der Integrationskonstanten $a$ erhält. Hier lassen sich die Variablen trennen; (39) ist äquivalent mit

$$\frac{\dot{u}_1^2}{f_1 - a} - \frac{\dot{u}_2^2}{f_2 + a} = 0, \tag{40}$$

so daß in der Tat

$$\int \frac{du_1}{\sqrt{f_1 - a}} - \int \frac{du_2}{\sqrt{f_2 + a}} = b \tag{41}$$

die gesuchte Gleichung der Geodätischen in geschlossener Form mit den beiden Integrationskonstanten $a$ und $b$ ist.

Das Zwischenintegral (39) läßt sich in eine durchsichtigere Gestalt bringen, wenn man den Winkel $\varphi$ der Richtung $\dot{u}_\alpha$ der Geodätischen mit der Richtung der Parameterlinien $u_2 =$ konst. einführt. Da der Einheitsvektor der letzteren die Komponenten $\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}$, 0 hat, wird

(42) $$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{u}_\alpha\dot{u}_\beta}}\, g_{\alpha 1}\dot{u}_\alpha \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} = \frac{\dot{u}_1}{\sqrt{\dot{u}_1^2+\dot{u}_2^2}}$$
und
(43) $$\sin\psi = \frac{\dot{u}_2}{\sqrt{\dot{u}_1^2+\dot{u}_2^2}}.$$
Aus (39) folgt
(44) $$f_1\sin^2\psi - f_2\cos^2\psi = a.$$

Aus der Form (III, 8, 24) des quadrierten Bogenelementes ersieht man, daß *die Drehflächen zu den Liouvilleschen Flächen gehören*. Dabei ist $f_1 = \varphi^2$, $f_2 = 0$. Aus (44) entnimmt man, daß die Konstante $a \geqq 0$ sein muß. Setzt man $a = k^2$, so folgt aus (44)

(45) $$\varphi\sin\psi = k,$$

oder in Worten *(Satz von Clairaut)*:

*Bei den Geodätischen einer Drehfläche ist in jedem Punkt der Sinus ihres Neigungswinkels zum zugehörigen Meridian verkehrt proportional zum Radius des zugehörigen Breitenkreises.*

**F. Die Starrheit der Eiflächen.** Als Anwendungsbeispiel der Untersuchungen von V, § 6 einerseits und der Formel von Gauss-Bonnet andrerseits beweisen wir den von Liebmann herrührenden Satz, daß eine *Eifläche*, d. h. eine Fläche stetiger positiver Krümmung vom Zusammenhang der Kugel, keine infinitesimalen Verbiegungen gestattet, sich also wie ein starrer Körper verhält.[1]) Wir führen den Beweis indirekt, indem wir zeigen, daß die Annahme, der in V, § 6 eingeführte Drehvektor $y_i$ sei nicht konstant, auf einen Widerspruch führt.

Wir denken uns die gegebene Eifläche auf Krümmungsparameter bezogen. Dann ist $g_{12} = b_{12} = 0$ und für die Krümmung ergibt sich

(46) $$K = \frac{b_{11}b_{22}}{g_{11}g_{22}}.$$

Da stets $g = g_{11}g_{22} > 0$ und voraussetzungsgemäß auch $K > 0$ ist, muß auch

(47) $$b_{11}b_{22} > 0$$

sein. Aus (V, 6, 27) folgt

(48) $$C_{1}^{;2} b_{22} = C_{2}^{;1} b_{11},$$

so daß wegen (47)

(49) $$C_{1}^{;2} C_{2}^{;1} \geqq 0$$

ist. Die Gleichungen (V, 6, 26) geben

(50) $$B_{11} = C_{1}^{;1} b_{11}, \quad B_{12} = C_{1}^{;2} b_{22} = C_{2}^{;1} b_{11}, \quad B_{22} = C_{2}^{;2} b_{22}.$$

1) In der obigen Form stammt der Beweis vom Verfasser (Monatshefte für Mathematik und Physik XXXVI, 1929).

Für das Vorzeichen sign $K'$ der Krümmung $K'$ der Fläche $y_i$ ergibt sich, wenn wir zunächst $K' \neq 0$ annehmen, wegen (V, 6, 25), (47), (49) und (50)

$$(51)\qquad \operatorname{sign} K' = \operatorname{sign}(B_{11} B_{22} - B_{12}^2) = \operatorname{sign}(C_1^{;1} C_2^{;2} - C_1^{;2} C_2^{;1})\, b_{11} b_{22}$$
$$= \operatorname{sign}(-(C_1^{;1})^2 - C_1^{;2} C_2^{;1})\, b_{11} b_{22} = -1,$$

d. h. die zu $x_i$ assoziierte Fläche $y_i$ ist überall *negativ* gekrümmt. Wegen der ein-eindeutigen und stetigen Abbildung auf $x_i$ ist sie ferner eine geschlossene Fläche von denselben Zusammenhangsverhältnissen wie $x_i$, also vom Zusammenhang der Kugel. Nach der Formel (5, 15) von GAUSS-BONNET ist die Gesamtkrümmung der Fläche $y_i$ gleich $4\pi$, also positiv in Widerspruch dazu, daß bei Flächen negativer Krümmung auch die Gesamtkrümmung negativ ist. Es verbleibt also nur der Schluß $K' = 0$, d. h. nach (51)

$$(C_1^{;1})^2 + C_1^{;2} C_2^{;1} = 0,$$

was wegen (49) und (V, 6, 25) nur möglich ist, wenn alle $C_\alpha^{;\beta}$ verschwinden. Dann ist aber nach (V, 6, 23) $\frac{\partial y_i}{\partial u_\alpha} = 0$, d. h. $y_i$ konstant und die infinitesimale Verbiegung eine starre Bewegung der Fläche, wie wir in V, § 6 ausführlich gezeigt haben.

**G. Eine geometrische Deutung der Gesamtkrümmung.** Wie zu Beginn von § 5 betrachten wir ein einfach zusammenhängendes Flächenstück, dessen Randkurve $C$ den dort angegebenen Voraussetzungen genügen möge. In einem Punkt von $C$ sei ein Einheitsvektor etwa durch seine kontravarianten Komponenten $\xi^\alpha$ gegeben. Wir verschieben diesen Vektor parallel einmal um $C$ herum und berechnen den Winkel, den Anfangs- und Endlage in $P$ miteinander einschließen. Wir gehen von der Darstellung von $\xi^\alpha$ in einem normierten Zweibein aus, das in allen Punkten eines $C$ enthaltenden Gebietes definiert und stetig differenzierbar ist. Sei $\varphi$ der Winkel, den $\xi^\alpha$ in $P$ mit ${}_{(1)}\lambda^\alpha$ einschließt. Aus der Beindarstellung

$$(52)\qquad \xi^\alpha = {}_{(\varrho)}\lambda^\alpha\, {}_{(\varrho)}\xi$$

ergibt sich dann

$$(53)\qquad \cos\varphi = {}_{(1)}\xi, \quad \sin\varphi = {}_{(2)}\xi.$$

Setzt man das in die Differentialgleichungen (1, 8) der Parallelverschiebung ein, so folgt

$$(54)\qquad d\varphi + {}_{(12)}C_\beta\, du_\beta = 0.$$

Durch Integration um $C$ ergibt sich daraus wegen (5, 5) für den gesuchten Winkel $D\varphi$

$$(55)\qquad \boldsymbol{D\varphi = \iint K\, do.}$$

*Die Gesamtkrümmung eines einfach zusammenhängenden Flächenstückes der a. a. O. angegebenen Art ist gleich dem Winkel, um den sich ein längs der Randkurve $C$ parallelverschobener Vektor bei einem Umlauf um $C$ dreht.*

# VII. Spezielle Flächen.

## § 1. Regelflächen.

Unter Regelflächen versteht man Flächen mit (mindestens) einer Schar gerader Linien. Die schon wiederholt behandelten Torsen sind spezielle Beispiele. Eine besonders einfache Parameterdarstellung einer Regelfläche ergibt sich aus der Parameterdarstellung

$$x_i = y_i + t e_i \tag{1}$$

einer Geraden, wenn man die $y_i$ und $e_i$ als Funktionen einer zweiten unabhängigen Veränderlichen $u$ nimmt.

Wir nehmen an, daß diese sechs Funktionen $y_i(u)$ und $e_i(u)$ zweimal stetig differenzierbar sind. Die Parameterkurven $u =$ konst. sind dann die geraden Linien oder *Erzeugenden* der Fläche. Nach IV, § 5 sind die Erzeugenden zugleich die eine Schar von Asymptotenlinien. Ist eine Regelfläche also in allgemeinen Parametern $u_\alpha$ gegeben, so findet man durch Ermittlung der Asymptotenlinien die Erzeugenden und damit auch die spezielle Darstellung (1). Die Kurve $t = 0$ heißt *Leitlinie* der Regelfläche in der Darstellung (1); wir wollen annehmen, daß sie sich nicht auf einen Punkt reduziert, d. h. daß die drei Funktionen $y_i(u)$ nicht bloß Konstante sind.

Ist die Leitlinie keine ametrische Kurve und $e_i(u)$ kein isotroper Vektor[1]), so können wir noch voraussetzen, daß $u$ die Bogenlänge der Leitkurve und $e_i$ ein Einheitsvektor ist. Dann gilt

$$y_i' y_i' = 1, \quad y_i' y_i'' = 0; \quad e_i e_i = 1, \quad e_i e_i' = 0, \tag{2}$$

wobei die Striche Ableitungen nach $u$ bedeuten. Der Maßtensor wird

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = e_i y_i' = \cos\vartheta, \quad g_{22} = 1 + 2t y_i' e_i' + t^2 e_i' e_i', \tag{3}$$

wo $\vartheta$ der Winkel zwischen Erzeugenden und Leitlinie ist, seine Diskriminante

$$g = \sin^2\vartheta + 2t y_i' e_i' + t^2 e_i' e_i' \tag{4}$$

---

1) Erstere Annahme ist stets erfüllbar, wenn man die Leitlinie, die ja offenbar nichts für die Fläche Charakteristisches ist, geeignet wählt (jede Kurve, die im betrachteten Bereich alle Erzeugenden einmal und nur einmal schneidet, kann als Leitlinie genommen werden). Dagegen erfordern Regelflächen mit isotropen Erzeugenden eine gesonderte Behandlung (vgl. die Bemerkung über die Kugel im Text auf S. 222, sowie § 4 A).

und der Haupttensor

$$(5)\qquad b_{11}=0,\ b_{12}=\frac{1}{\sqrt{g}}\,\varepsilon_{ikl}e_i y_k' e_l',\ b_{22}=\frac{1}{\sqrt{g}}\,\varepsilon_{ikl}e_i(y_k'+te_k')(y_l''+te_l'').$$

Für die Gausssche Krümmung folgt daraus

$$(6)\qquad K=\frac{b}{g}=-\frac{b_{12}^2}{g}.$$

Auf Flächen mit reellen Erzeugenden ist also stets $K\leqq 0$ und $K=0$ dann und nur dann, wenn $b_{12}=0$ oder

$$(7)\qquad \varepsilon_{ikl}\,e_i\,y_k'\,e_l'=0$$

ist. Da $K=0$ nach IV, § 2 charakteristisch für die Torsen ist, kennzeichnet (7) diese Flächen unter den allgemeinen Regelflächen (1). Regelflächen, die keine Torsen sind, nennen wir *windschief*.[1]) Die Bedingung (7) ist sicher erfüllt, wenn $e_i'=0$ ist; dann ist der Vektor $e_i$ konstant, die Erzeugenden alle parallel und die Fläche ein Zylinder. Diesen Fall wollen wir von nun an ausschließen.

Daß (7) für die Torsen charakteristisch ist, kann man übrigens auch ohne Bezug auf $K=0$ einsehen; aus (7) folgt ja, daß die Tangentenvektoren der Parameterlinien, nämlich $\frac{\partial x_i}{\partial t}=e_i$ und $\frac{\partial x_i}{\partial u}=y_i'+te_i'$ für alle $t$ in einer Ebene liegen, da das für die Vektoren $e_i$, $e_i'$ und $y_i'$ gilt. Somit berühren die Tangentenebenen die Fläche immer in allen Punkten einer Erzeugenden.

Wir benützen dieses Ergebnis, um den in Abschnitt II, am Schluß von § 5 erwähnten Satz zu beweisen, daß die von den Haupt- und Binormalen einer Kurve $y_i=y_i(s)$ beschriebenen Regelflächen nur dann Torsen sind, wenn die Kurve eben ist. Die Hauptnormalenfläche $y_i+t\eta_i$ ist eine Torse, wenn

$$\varepsilon_{ikl}y_i'\eta_k\eta_l'=0$$

ist. Wegen $y_i'=\xi_i$, $\eta_i'=-\varkappa\xi_i+\tau\zeta_i$ ist aber

$$\varepsilon_{ikl}\,y_i'\,\eta_k\,\eta_l'=\tau\,\varepsilon_{ikl}\,\xi_i\,\eta_k\,\zeta_l=\tau,$$

und $\tau=0$ ist notwendig und hinreichend für ebene Kurven. Ebenso erhält man für die Binormalenfläche $y_i+t\zeta_i$ wegen $\zeta_i'=-\tau\eta_i$ die Bedingung $\varepsilon_{ikl}y_i'\zeta_k\zeta_l'=\tau\,\varepsilon_{ikl}\xi_i\eta_k\,\zeta_l=\tau=0$.

1) Legt man durch einen Punkt $P$ einer Regelfläche und durch eine nicht durch $P$ gehende Erzeugende $g'$ eine Ebene, so nähert sich diese Ebene, wenn $g'$ an $P$ heranrückt, einer Grenzlage, die von der besonderen Wahl des Punktes $P$ auf der durch $P$ gehenden Erzeugenden unabhängig oder abhängig ist, je nachdem es sich um eine Torse oder um eine windschiefe Regelfläche handelt. Man pflegt das gewöhnlich so auszudrücken: „Benachbarte" Erzeugende einer Torse schneiden sich (weil sie in einer Ebene liegen), „benachbarte" Erzeugende einer windschiefen Regelfläche sind windschief. Wir erwähnen das nur zur Erklärung der Bezeichnung „windschiefe Regelfläche".

Die Differentialgleichung der Asymptotenlinien kann man wegen (5) in der Form

$$\varepsilon_{ikl}\, du \{ 2 e_i y_k' e_l' dt + [e_i y_k' y_l'' + (e_i e_k' y_l'' + e_i y_k' e_l'') t + e_i e_k' e_l'' t^2] du \} = 0 \tag{8}$$

schreiben. Die eine Schar der Integralkurven ist die Schar der Erzeugenden $u =$ konst. Für eine Torse wird nach (7) die zweite Schar mit dieser identisch (vgl. IV, § 2). Gilt (7) nicht, handelt es sich also um eine windschiefe Regelfläche, so hat (8) die Form

$$\frac{dt}{du} = A t^2 + B t + C, \tag{9}$$

wo $A, B, C$ stetige Funktionen von $u$ sind, und ist also eine RICCATIsche Differentialgleichung. Die Substitution $t = -\frac{1}{\lambda A} \frac{d\lambda}{du}$ führt (9) über in die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2\lambda}{du^2} - \left(B + \frac{d \ln A}{du}\right) \frac{d\lambda}{du} - A C \lambda = 0, \tag{10}$$

deren allgemeines Integral die Form

$$\lambda = C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 \tag{11}$$

hat, wobei $C_1$, $C_2$ Konstante und $\lambda_1$, $\lambda_2$ zwei partikuläre Integrale sind. Setzt man $\frac{C_1}{C_2} = c$, so ergibt sich daraus das allgemeine Integral von (9) in der Form

$$t = \frac{pc + q}{rc + s}, \tag{12}$$

wo $c$ die Integrationskonstante und $p, q, r, s$ gewisse Funktionen von $u$ sind. Es ist also $t$ eine linear gebrochene Funktion der Integrationskonstanten $c$ und daher ist, wenn ${}_{(\sigma)}t$ $(\sigma = 1, 2, 3, 4)$ vier partikuläre Lösungen sind, die bzw. zu den Werten ${}_{(\sigma)}c$ $(\sigma = 1, 2, 3, 4)$ von $c$ gehören, *das Doppelverhältnis* $D({}_{(1)}t, {}_{(2)}t, {}_{(3)}t, {}_{(4)}t)$ *der* ${}_{(\sigma)}t$ *dasselbe wie das Doppelverhältnis* $D({}_{(1)}c, {}_{(2)}c, {}_{(3)}c, {}_{(4)}c)$ *der Konstanten* ${}_{(\sigma)}c$, *also jedenfalls von $u$ unabhängig.* Zwischen den Punkten zweier Erzeugenden der Regelfläche besteht eine umkehrbar eindeutige Zuordnung, in der je zwei Punkte einander entsprechen, die auf derselben Asymptotenlinie der zweiten Schar liegen; *diese Zuordnung ist aber eine Projektivität,* da nach dem obigen Satz vier Punkte auf der einen Erzeugenden dasselbe Doppelverhältnis haben wir die vier entsprechenden Punkte auf der zweiten Erzeugenden.

Mit Hilfe dieses Satzes sind wir in der Lage, alle Regelflächen mit zwei Scharen geradliniger Erzeugender zu bestimmen. Diese zweite Geradenschar ist dann mit der zweiten Schar der Asymptotenlinien identisch und jede solche

Fläche kann in doppelter Weise als Ort der Verbindungsgeraden zweier projektiver Punktreihen angesehen werden, sie ist, wie man in der projektiven Geometrie sagt, das „Erzeugnis" zweier projektiver Punktreihen und somit eine (nicht ausgeartete) Fläche zweiten Grades; bei reellen Erzeugenden ein einschaliges Hyperboloid oder hyperbolisches Paraboloid, bei imaginären ein Ellipsoid, zweischaliges Hyperboloid oder elliptisches Paraboloid. Als Sonderfall der Ellipsoide sind die Kugeln dadurch bemerkenswert, daß sie zwei Scharen *isotroper* Erzeugender haben.[1])

Mit Hilfe der in I, § 6 B entwickelten Formeln können wir uns eine wichtige Differentialinvariante einer Regelfläche (1) verschaffen. Es seien

$$y_i(u) + te_i(u), \quad y_i(u+h) + te_i(u+h) \tag{13}$$

bei festem $u$ und $h > 0$ zwei (verschiedene) Erzeugende von (1). Ihr Winkel $\varphi$ ist nach (I, 6, 21)

$$\varphi = \operatorname{arc\,cos} e_i(u)\, e_i(u+h) \tag{14}$$

und somit wird $\quad \dfrac{d\varphi}{du} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\varphi}{h} = \dfrac{\operatorname{arc\,cos} e_i(u)\, e_i(u+h)}{h};$

behandeln wir diesen Ausdruck als sog. unbestimmte Form durch Differentiation von Zähler und Nenner nach $h$, so wird

$$\frac{d\varphi}{du} = \lim_{h\to 0} \frac{-e_i(u)\, e_i'(u+h)}{\sqrt{1-[e_i(u)\, e_i(u+h)]^2}}, \tag{15}$$

also, wenn wir quadrieren und nochmals differenzieren,

$$\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2 = \lim_{h\to 0} \frac{[e_i(u)\, e_i'(u+h)]^2}{1-[e_i(u)\, e_i(u+h)]^2} = \lim_{h\to 0} \frac{[e_i(u)\, e_i'(u+h)]\,[e_i(u)\, e_i''(u+h)]}{-[e_i(u)\, e_i(u+h)]\,[e_i(u)\, e_i'(u+h)]},$$

also

$$\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2 = -e_i e_i'' = e_i' e_i', \tag{16}$$

da aus der letzten Formel (2) durch Differentiation $e_i e_i'' + e_i' e_i' = 0$ folgt.

Ist $p$ der Abstand der beiden Erzeugenden (13), so erhalten wir aus (I, 6, 17)

$$\frac{dp}{du} = \lim_{h\to 0} \frac{p}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\varepsilon_{ikl}[y_i(u+h) - y_i(u)]\, e_k(u)\, e_l(u+h)}{h\sqrt{1-[e_i(u)\, e_i(u+h)]^2}}, \tag{17}$$

oder wegen $\quad \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{y_i(u+h) - y_i(u)}{h} = y_i'(u)$

weiter

$$\frac{dp}{du} = \lim_{h\to 0} \frac{\varepsilon_{ikl}\, y_i'(u)\, e_k(u)\, e_l(u+h)}{\sqrt{1-[e_i(u)\, e_i(u+h)]^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{\varepsilon_{ikl}\, y_i'(u)\, e_k(u)\, e_l'(u+h)}{\dfrac{-[e_i(u)\, e_i(u+h)]\,[e_i(u)\, e_i'(u+h)]}{\sqrt{1-[e_i(u)\, e_i(u+h)]^2}}}.$$

---

1) Über die (notwendig imaginären) Flächen mit einer Schar isotroper Erzeugender vgl. § 4 A.

Hier stimmt der Nenner bis auf den Faktor $e_i(u)e_i(u+h)$, der nach 1 konvergiert und daher unwesentlich ist, mit (15) überein; es wird also

$$\frac{dp}{du}=\frac{\varepsilon_{ikl}y_i'e_ke_l'}{\frac{d\varphi}{du}}$$

und somit wegen (16)

$$\frac{dp}{d\varphi}=\frac{\varepsilon_{ikl}y_i'e_ke_l'}{e_i'e_i'}. \tag{18}$$

Dieser Ausdruck, dessen Invarianz gegenüber Bewegungen und zulässigen Parametertransformationen $u=u(\bar{u})$ aus der Herleitung hervorgeht und auch direkt leicht zu bestätigen ist, wird als *Verteilungsparameter* oder *Drall* der Regelfläche bezeichnet. Aus (7) folgt, daß *der Drall für Torsen und nur für diese verschwindet.*

Es sei $\overset{1}{u}, \overset{2}{u}, \ldots, \overset{n}{u}, \ldots$ eine beliebige Zahlenfolge, die ganz dem Definitionsbereich der Funktionen $y_i(u)$ und $e_i(u)$ angehört. Wir betrachten die zugehörige Folge von Erzeugenden $\overset{1}{g}, \overset{2}{g}, \ldots, \overset{n}{g}, \ldots$ der Fläche (1) und denken uns das gemeinsame Lot je zweier benachbarter Erzeugender $\overset{i}{g}$ und $\overset{i+1}{g}$ der Folge gezogen. Denkt man sich die Werte in der obigen Folge immer dichter und dichter gewählt, so daß die Längen aller dieser Lote, also die Abstände aller benachbarten Erzeugenden der Folge gegen Null konvergieren, so liegen die Fußpunkte dieser Lote im Grenzfall auf einer Kurve, die man als *Kehllinie* oder *Striktionslinie* der Regelfläche bezeichnet. Der Polygonzug, den man im Fall endlicher aber hinreichend klein gewählter Abstände der Erzeugenden $g$ erhält und der aus den obigen Loten und Stücken der Erzeugenden selbst besteht (Fig. 12), ist eine Näherungskurve der Kehllinie. Dieselbe muß also die Erzeugenden durchaus nicht orthogonal schneiden.

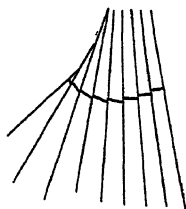



Fig. 12.

Für den Parameterwert $t$ des Fußpunktes des gemeinsamen Lotes der beiden Erzeugenden (13) folgt aus (I, 6, 18)

$$t=\lim_{h\to 0}\frac{[y_i(u+h)-y_i(u)]e_k(u+h)[e_i(u)e_k(u+h)-e_i(u+h)e_k(u)]}{1-[e_i(u)e_i(u+h)]^2}$$

oder, wenn wir im Zähler die beiden unwesentlichen Ausdrücke

$$e_k(u+h)e_k(u+h)=1 \quad \text{und} \quad e_k(u+h)e_k(u),$$

dessen Grenzwert 1 ist, weglassen und Zähler und Nenner je einmal nach $h$ differenzieren,

$$t=\lim_{h\to 0}\frac{y_i'(u+h)[e_i(u)-e_i(u+h)]-[y_i(u+h)-y_i(u)]e_i'(u+h)}{-2[e_i(u)e_i'(u+h)]}.$$

Nun ist $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e_i(u)-e_i(u+h)}{e_i(u)e_i'(u+h)}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{-e_i'(u+h)}{e_i(u)e_i''(u+h)}=\frac{-e_i'}{e_ie_i''}=\frac{e_i'}{e_i'e_i'}$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{y_i(u+h)-y_i(u)}{e_i(u)e_i'(u+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{y_i'(u+h)}{e_i(u)e_i''(u+h)}=\frac{y_i'}{e_i'e_i''}=\frac{-y_i'}{e_i'e_i'}$$

und somit

$$t=-\frac{y_i'e_i'}{e_i'e_i'}. \tag{19}$$

Aus (1) erhalten wir dann die *Parameterdarstellung der Kehllinie*

$$x_i=y_i-\frac{y_i'e_i'}{e_i'e_i'}e_i. \tag{20}$$

So ist z. B. die Kehllinie der Schraubenfläche

$$x_i=a_i+ku\zeta_i+t(\xi_i\cos u+\eta_i\sin u),$$

wo $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$ die drei Vektoren eines festen normierten Dreibeins sind, $a_i$ ein beliebiger fester Vektor und $k$ eine Konstante ist[1]), die Achse $a_i+ku\zeta_i$; die Kehllinie des einschaligen Hyperboloids

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2-\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2=1$$

ist die Ellipse $\quad\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2=1,\quad x_3=0.$

Nach (19) *ist die Leitlinie selbst Kehllinie, wenn*

$$y_i'e_i'=0 \tag{21}$$

*gilt.*

Wir beweisen zum Schluß den Satz von Bonnet: *Hat eine Kurve auf einer Regelfläche zwei der drei Eigenschaften:*

A. *die Erzeugenden unter konstantem Winkel zu schneiden,*

B. *Kehllinie zu sein,*

C. *geodätische Linie zu sein,*

*so hat sie auch die dritte*, d. h. aus A. und B. folgt C., aus B. und C. folgt A. und aus A. und C. folgt B. Die in Rede stehende Kurve sei die Leitlinie der Regelfläche (1). Dann ist die Bedingung A. nach (3) äquivalent mit $g_{12}=e_iy_i'=$ konst. oder mit

$$e_iy_i''+e_i'y_i'=0; \tag{22}$$

---

1) Die Schraubenfläche entsteht durch Drehung einer zu $\zeta_i$ senkrechten Geraden um die Achse $a_i+ku\zeta_i$ unter gleichzeitigem Vorrücken in der Richtung $\zeta_i$ (Beispiel: die Stufenkanten einer Wendeltreppe, die in eine Schraubenfläche übergeht, wenn die Stufenhöhe nach Null konvergiert). Die orthogonalen Trajektorien der Erzeugenden sind gemeine Schraubenlinien.

die Bedingung B. äquivalent mit (21), und was C. betrifft, erinnern wir zunächst daran, daß eine Flächenkurve dann geodätische Linie heißt, wenn in jedem Punkt ihre Schmiegebene die Flächennormale enthält. Nun ist die Schmiegebene der Leitlinie senkrecht zu $\varepsilon_{ikl}\, y_i'\, y_k''$, die Flächennormalen längs der Leitlinie ($u = 0$) parallel zu $\varepsilon_{hjl}\, e_h\, y_j'$, und somit ist C. äquivalent mit

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{hjl}\, y_i'\, y_k''\, e_h\, y_j' &= (\delta_{ih}\,\delta_{kj} - \delta_{ij}\,\delta_{kh})\, y_i'\, y_k''\, e_h\, y_j' \\ &= y_i'\, e_i\, y_k'\, y_k'' - y_i'\, y_i'\, e_k\, y_k'' = 0,\end{aligned}$$

also wegen (2) mit

$$e_i\, y_i'' = 0. \tag{23}$$

Daraus ist aber die Richtigkeit des Satzes von Bonnet unmittelbar zu entnehmen; aus (21) und (22) folgt (23) usw.

## § 2. Flächen konstanter Krümmung.

Wir führen auf einer Fläche mit der konstanten Krümmung $K$ geodätische Polarkoordinaten $u$, $v$ ein, indem wir einen beliebigen Punkt $P$ als Zentrum ($u = v = 0$) und eine beliebige Geodätische durch $P$ als Kurve $v = 0$ wählen. Das quadrierte Bogenelement hat dann nach (VI, 4, 5) die Form

$$ds^2 = du^2 + G\, dv^2, \tag{1}$$

wobei nach (VI, 4, 12) und (VI, 4, 13)

$$G(0, v) = 0, \quad \frac{\partial \sqrt{G(0, v)}}{\partial u} = 1 \tag{2}$$

ist. Für die Krümmung $K$ fanden wir

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}, \tag{3}$$

eine Formel, die unabhängig von (2) immer gilt, wenn $ds^2$ die Form (1) hat. Die Differentialgleichung (3) für die Funktion $G$ ist mittels elementarer Methoden integrierbar, wenn $K$ konstant ist. Wir behandeln die drei Fälle $K = 0$, $K > 0$ und $K < 0$ getrennt.

1. $K = 0$. Aus (3) folgt $\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = 0$ und daraus $\sqrt{G} = u A(v) + B(v)$. Wegen der Randbedingungen (2) ist aber $A(v) = 1$, $B(v) = 0$, also wird $ds^2 = du^2 + u^2\, dv^2$. Das ist aber genau die Form (VI, 4, 10) des quadrierten Bogenelementes einer euklidischen Ebene in Polarkoordinaten. Setzt man $u \cos v = x$, $u \sin v = y$, so wird $ds^2 = dx^2 + dy^2$, d. h. die Riemannschen Normalkoordinaten $x$, $y$ sind rechtwinklige kartesische Koordinaten der Ebene.

2. $K > 0$. Das allgemeine Integral von (3), d. h.

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} + K \sqrt{G} = 0 \tag{4}$$

läßt sich in der Form

$$\sqrt{G} = A(v) \cos(\sqrt{K} u) + B(v) \sin(\sqrt{K} u) \tag{5}$$

schreiben. Wegen (2) ist aber $A(v) = 0$, $B(v) = \frac{1}{\sqrt{K}}$, so daß

$$ds^2 = du^2 + \frac{1}{K} \sin^2(\sqrt{K} u)\, dv^2 \tag{6}$$

wird. Umgekehrt gilt für diese Form des $ds^2$ die Formel (3), also ist (6) tatsächlich das quadrierte Bogenelement einer Fläche mit der konstanten positiven Krümmung $K$.

3. $K < 0$. Das allgemeine Integral von (4) lautet $(\sqrt{-K} > 0)$

$$\sqrt{G} = A(v) e^{\sqrt{-K} u} + B(v) e^{-\sqrt{-K} u}. \tag{7}$$

Wegen (2) ist $A(v) = \frac{1}{2\sqrt{-K}}$, $B(v) = \frac{-1}{2\sqrt{-K}}$, also[1])

$$\sqrt{G} = \frac{1}{2\sqrt{-K}} \left(e^{\sqrt{-K} u} - e^{-\sqrt{-K} u}\right) = \frac{1}{\sqrt{-K}} \operatorname{sh}(\sqrt{-K} u) \tag{8}$$

und

$$ds^2 = du^2 - \frac{1}{K} \operatorname{sh}^2(\sqrt{-K} u)\, dv^2. \tag{9}$$

Hinsichtlich der Umkehrung gilt dieselbe Bemerkung wie im zweiten Fall.

Es gibt also zu jedem Wert der konstanten Krümmung $K$ eine einzige Fläche im Sinn der Riemannschen Geometrie; als Fläche eines euklidischen Raumes kann sie natürlich die verschiedensten Gestalten haben, doch lassen sich entsprechend den „kanonischen" Darstellungen (6) und (9) alle Flächen mit demselben konstanten $K$ längentreu aufeinander abbilden. Hier ist also die Gleichheit von $K$ nicht nur eine notwendige, sondern auch eine *hinreichende* Bedingung für die Abwickelbarkeit zweier Flächen aufeinander.

Aber noch mehr! Wegen der Konstanz von $K$ sind unsere kanonischen Formen (6) und (9) des quadrierten Bogenelementes völlig unabhängig von der Wahl des Zentrums $P$ der geodätischen Polarkoordinaten und auch unabhängig von der Wahl der Geodätischen $v = 0$ durch $P$. Das heißt aber nichts anderes, als daß jede Fläche konstanter Krümmung auf $\infty^3$ Arten (zwei Be-

1) Es bedeutet $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ und $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ der Reihe nach den hyperbolischen Sinus, Kosinus und Tangens von $x$.

stimmungsstücke des Zentrums $P$ und ein Bestimmungsstück der Richtung von $v=0$) auf sich selbst längentreu abgebildet werden kann, oder mit anderen Worten: *Auf jeder Fläche konstanter Krümmung existiert eine dreigliedrige Gruppe von Punkttransformationen, die jede auf der Fläche gezeichnete Figur in eine (im Sinn der Riemannschen Geometrie) kongruente Figur überführen.* Wir können also mit vollem Recht von *Bewegungen* und von einer *Bewegungsgruppe* sprechen. Im Fall $K=0$ kommt man so direkt zu den euklidischen Bewegungen, deren Invariantentheorie nach I, § 2 eben die euklidische Geometrie der Ebene ist. Ist aber $K \neq 0$, so sind die Invariantentheorien unserer Bewegungsgruppen gerade die nichteuklidischen Geometrien, und zwar für $K>0$ die elliptische, für $K<0$ die hyperbolische Geometrie (I, § 3). Die folgenden Ausführungen sollen das deutlich machen.

Betrachten wir zunächst ein geodätisches Dreieck mit den Innenwinkeln $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. In (VI, 5, 18) erhielten wir für die Gesamtkrümmung eines solchen Dreiecks

$$\iint K\,do = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \pi. \tag{10}$$

Ist aber $K$ konstant, so ergibt sich links $K\iint do = KF$, wo $F$ der Flächeninhalt des Dreiecks ist. Es wird also

$$KF = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \pi. \tag{11}$$

Für $K=0$ ergibt sich die elementare Tatsache, daß die Winkelsumme eines ebenen Dreiecks gleich $\pi$ ist. Für $K>0$ ist diese Winkelsumme dagegen stets größer, für $K<0$ stets kleiner als $\pi$, und zwar ist die Abweichung — der *Exzeß* des Dreiecks — dem Flächeninhalt direkt proportional und somit für alle Dreiecke gleichen Inhalts gleich. Diese Dreieckseigenschaften sind sogar charakteristisch für unsere drei Typen von Geometrien; ist nämlich $cF$ die Abweichung ($c$ konstant), $F$ der Flächeninhalt des betrachteten geodätischen Dreiecks und $K$ die Krümmung der Fläche, so ist nach Voraussetzung

$$cF = \iint c\,do = \iint K\,do$$

für *alle* geodätischen Dreiecke, so daß $K=c$ sein muß.

Diese Dreieckseigenschaft, und zwar für den Fall $K>0$, gilt nun aber bekanntlich in der *sphärischen Geometrie*, d. h. in der Geometrie auf der Kugel. Das stimmt damit überein, daß die Kugel konstante positive Krümmung hat. Das quadrierte Bogenelement der Kugel muß sich also in geeigneten Parametern auf die Form (6) bringen lassen. Das gelingt auch ohne Schwierigkeit, wenn wir von der Parameterdarstellung

$$x_1 = r\sin\frac{u}{r}\cos v, \quad x_2 = r\sin\frac{u}{r}\sin v, \quad x_3 = r\cos\frac{u}{r} \tag{12}$$

der Kugel ausgehen, wo $r$ der Kugelradius, $u$ die vom Punkt $(0, 0, r)$ aus gemessene Bogenlänge der Hauptkreise und $v$ der Winkel ist, den die Ebenen dieser Hauptkreise mit der Ebene $x_2 = 0$ einschließen. Man rechnet leicht nach, daß sich für $ds^2 = dx_i\,dx_i$ genau der Ausdruck (6) mit $K = \frac{1}{r^2}$ ergibt.

Wir projizieren die Kugel (12) aus ihrem Mittelpunkt auf die Ebene $x_3 = r$; die Abbildungsgleichungen lauten

$$x_1 = r \tan\frac{u}{r} \cos v, \quad x_2 = r \tan\frac{u}{r} \sin v; \tag{13}$$

dabei sind $x_1$ und $x_2$ rechtwinklige kartesische Koordinaten in der Ebene $x_3 = r$. Diese Abbildung hat die wichtige Eigenschaft, die Geodätischen der Kugel — das sind offenbar die Hauptkreise — auf die Geraden der Ebene $x_3 = r$ abzubilden. Es liegt die Vermutung nahe, daß dieses ebene Bild der sphärischen Geometrie mit der elliptischen Geometrie identisch ist. Zuvor aber noch eine Bemerkung über die sphärische Geometrie, d. i. die Geometrie auf der (ganzen) Kugel! Man sieht sofort ein, daß diese sphärische Geometrie nicht die elliptische Geometrie sein kann, denn zwei Hauptkreise haben stets zwei Punkte, die einander diametral gegenüberliegen, gemeinsam. Da aber die Hauptkreise jedenfalls die Geraden der elliptischen Geometrie sein müßten, ergibt sich daraus ein Widerspruch dazu, daß in der elliptischen Geometrie die Axiome der projektiven Geometrie gelten[1]), so daß insbesondere zwei Gerade nie mehr als einen Punkt gemeinsam haben können, wenn sie nicht überhaupt miteinander identisch sind. Dagegen erscheint dieser Widerspruch behoben, wenn man entweder je zwei diametral gegenüberliegende Kugelpunkte als identisch ansieht oder nach einem Vorschlag von F. Klein an Stelle der ganzen Kugel bloß eine Halbkugel (etwa $x_3 \leqq 0$) betrachtet, von deren Randpunkten aber wieder je zwei diametral gegenüberliegende als identisch anzusehen sind (Fig. 13). Es sei gleich bemerkt, daß dieses Modell im Gegensatz zur ganzen Kugelfläche *einseitig* ist (vgl. die Fußnote auf S. 85), wie man sich mittels der in Fig. 13 in drei aufeinanderfolgenden Lagen eingezeichneten Indikatrix (Drehsinn) leicht deutlich macht.

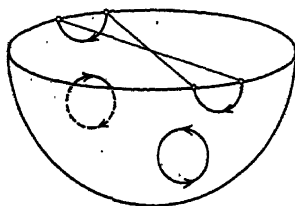



Fig. 13.

1) Und zwar in der reellen elliptischen Ebene vollständig, was bekanntlich z. B. in der euklidischen Ebene nicht der Fall ist, da die euklidische Ebene aus der projektiven durch Herausnahme des absoluten Kegelschnittes entsteht, der als Klassenkurve einfach (absolutes Punktepaar), als Ordnungskurve zweifach (Doppelgerade: die unendlichferne Gerade) ausgeartet ist. In der elliptischen Ebene (vgl. I, § 3) gibt es aber keine reellen „unendlichfernen" Punkte, da der absolute Kegelschnitt nullteilig ist, also keine reellen Punkte besitzt.

Unsere Abbildung (13) ordnet nun jedem Paar diametral gegenüberliegender Kugelpunkte umkehrbar eindeutig und stetig einen Punkt der Ebene zu. In dieser Ebene haben wir nun zwei Maßbestimmungen: erstens die euklidische, in der $x_1$, $x_2$ rechtwinklige kartesische Koordinaten sind, und zweitens die Maßbestimmung, die sich durch die Abbildung der Kugel überträgt; in der letzteren ist also der „Abstand" zweier Punkte gleich dem auf der Kugel (und zwar auf dem kleineren der beiden, durch die zwei Punkte bestimmten Hauptkreisbogen) gemessenen Abstand der entsprechenden Kugelpunkte; der „Winkel" zweier Geraden gleich dem Winkel der beiden entsprechenden Hauptkreise (wir setzen im folgenden alle Größen dieser Bildgeometrie in Anführungszeichen, um sie von den euklidischen Größen der Ebene zu unterscheiden). Die Geraden der Bildgeometrie sind geschlossene Kurven von der „Länge" $r\pi$, die unendlichfernen Punkte der Ebene haben vom Ursprung den „Abstand" $\frac{1}{2}r\pi$. Reelle „unendlichferne" Punkte gibt es in der Bildgeometrie nicht, wohl aber imaginäre. Sei z. B. $\varrho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ der (euklidische) Abstand eines Punktes vom Ursprung. Sein „Abstand" in der Bildgeometrie ist dann nach (13)

$$u = r \operatorname{arc\,tan} \frac{\varrho}{r} = \frac{r}{2i} \ln \frac{r + i\varrho}{r - i\varrho} \tag{14}$$

und wird somit unendlich für alle Punkte, für die $\varrho^2 + r^2 = 0$ ist, d. h. für alle Punkte des nullteiligen Kegelschnittes

$$x_1^2 + x_2^2 + r^2 = 0. \tag{15}$$

Wenn unsere Bildgeometrie nun wirklich eine elliptische Geometrie nach der in I, § 3 gegebenen Definition ist, so muß (15) der absolute Kegelschnitt sein und der „Abstand" zweier Punkte bis auf eine rein imaginäre Konstante mit dem Logarithmus des Doppelverhältnisses übereinstimmen, das die zwei Punkte und die Schnittpunkte ihrer Verbindungsgeraden mit dem Kegelschnitt (15) besitzen. Wir wählen die speziellen Punkte mit den rechtwinkligen Koordinaten $(0, 0)$ und $(0, a)$ und überlassen den allgemeinen Nachweis[1]), ebenso wie den Nachweis für die Winkelmessung, dem Leser. Die Verbindungsgerade der beiden Punkte ist die $x_2$-Achse: $x_1 = 0$; ihre Schnittpunkte mit (15) haben die Ordinaten $x_2 = \pm ir$. Das Doppelverhältnis der vier Punkte wird somit

$$DV(0, a, -ir, +ir) = \frac{ir}{a + ir} : \frac{-ir}{a - ir} = \frac{r + ia}{r - ia}. \tag{16}$$

1) Der gegebene Nachweis für die Abstandsdefinition ist insofern allgemein, als sich zu jedem Paar von Kugelpunkten ein kongruentes angeben läßt, dessen Bildpunkte in der Ebene die angegebenen rechtwinkligen Koordinaten haben (bei geeignetem $a$).

Nehmen wir für die erwähnte Konstante den Wert $\frac{r}{2i}$, so folgt

$$(17)\qquad \frac{r}{2i}\ln DV(0, a, -ir, +ir) = \frac{r}{2i}\ln\frac{r+ia}{r-ia} = r \arctan\frac{a}{r} = u_0,$$

wo $u_0$ der Abstand der entsprechenden Kugelpunkte ist, w. z. b. w. Als weitere Folgerung ergibt sich aus der obigen Bemerkung über die Zusammenhangsverhältnisse des KLEINschen Modells, daß die *elliptische Ebene einseitig ist (ebenso wie die projektive Ebene)*.

Wir kommen nun zum Fall $K < 0$. Als Modell wählen wir die nullteilige Kugel $x_i x_i = -r^2 = \frac{1}{K}$. Eine Parameterdarstellung derselben ist[1])

$$(18)\qquad x_1 = r \operatorname{sh}\frac{u}{r}\cos v,\quad x_2 = r \operatorname{sh}\frac{u}{r}\sin v,\quad x_3 = ir \operatorname{ch}\frac{u}{r}.$$

Für das quadrierte Bogenelement auf (18) erhält man durch einfache Rechnung

$$(19)\qquad ds^2 = dx_i\,dx_i = du^2 + r^2 \operatorname{sh}^2\frac{u}{r}\,dv^2,$$

also wegen $r^2 = -\frac{1}{K}$ genau die Form (9). Für die Projektion von (18) aus ihrem Mittelpunkt auf die Ebene $x_3 = ir$ ergeben sich die Abbildungsgleichungen

$$(20)\qquad x_1 = r \operatorname{th}\frac{u}{r}\cos v,\quad x_2 = r \operatorname{th}\frac{u}{r}\sin v.$$

Hier ist also wieder alles reell. Wegen $\lim\limits_{u\to\infty} \operatorname{th}\frac{u}{r} = 1$ ist der Kreis

$$(21)\qquad x_1^2 + x_2^2 = r^2$$

der Ort aller Punkte, deren „Abstand" (die Anführungszeichen haben die analoge Bedeutung wie oben im Fall $K > 0$) vom Ursprung $(0, 0)$ unendlich

1) Man kann das Imaginäre vermeiden, wenn man an Stelle der nullteiligen Kugel eines euklidischen Raumes ein gleichseitiges zweischaliges Drehhyperboloid eines pseudoeuklidischen Raumes (I, § 3) nimmt. Dieser Übergang läßt sich leicht bewerkstelligen, wenn man in (18) die dritte Gleichung durch $ix_3 = r \operatorname{ch}\frac{u}{r}$ ersetzt und dann $x_1, x_2$, $\bar{x}_3 = ix_3$ als rechtwinklige Koordinaten eines $R_3$ deutet. Das quadrierte Bogenelement dieses $R_3$ wird $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 - d\bar{x}_3^2$, ist also *indefinit*. An Stelle der Einheitskugel erhält man das gleichseitige einschalige Drehhyperboloid $x_1^2 + x_2^2 - \bar{x}_3^2 = r^2$, das im selben Sinn wie die Einheitskugel im euklidischen $R_3$ als *Eichfläche* des pseudoeuklidischen $R_3$ fungiert. An Stelle von (18) erhält man das gleichseitige zweischalige Drehhyperboloid $x_1^2 + x_2^2 - \bar{x}_3^2 + r^2 = 0$, und für das quadrierte Bogenelement dieser Fläche aus dem obigen $ds^2$ des pseudoeuklidischen $R_3$ genau die Form (19). Die (reelle) Projektion auf die (reelle) Ebene $\bar{x}_3 = r$, in der wieder eine euklidische Maßbestimmung gilt ($ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$), liefert die Abbildungsgleichungen (20) und als Bild der Maßbestimmung auf unserem Hyperboloid die hyperbolische Maßbestimmung in der Projektionsebene.

ist. Sie sind die „unendlichfernen“ Punkte der hyperbolischen Ebene, deren absoluter Kegelschnitt (21) ist. Der Nachweis, daß die Bildebene in der Tat eine hyperbolische Ebene ist, läßt sich ganz analog führen wie im Fall $K > 0$; rechnerisch besteht der einzige Unterschied darin, daß an die Stelle des trigonometrischen der hyperbolische Tangens von $\frac{u}{r}$ tritt. Die Durchführung der Rechnung und die Diskussion der Ergebnisse sei wieder dem Leser überlassen. Bemerkt sei jedoch, daß nur die Punkte im Innern des Kegelschnittes (21) in Betracht zu ziehen sind; die Punkte von (21) selbst sind, wie schon erwähnt, die „unendlichfernen“ Punkte der hyperbolischen Ebene, während die Punkte außerhalb von (21), die sogenannten *„idealen“* Punkte, „unzugänglich“ sind in dem Sinn, daß der „Abstand“ eines solchen Punktes von einem Punkt im Innern von (21) stets imaginär ist. Die hyperbolische Ebene besteht also nur aus den Punkten im Innern von (21). Eine unmittelbare Folgerung ist, daß durch jeden Punkt der hyperbolischen Ebene zwei Parallele zu einer gegebenen Geraden laufen („unendlichferne“ Schnittpunkte); zwischen diesen beiden Parallelen gibt es unendlich viele „Überparallele“, die die gegebene Gerade in idealen Punkten treffen. Eine weitere Folgerung sei noch erwähnt, nämlich die, daß die hyperbolische Ebene ebenso wie die euklidische *zweiseitig* ist.

Was nun umgekehrt die Veranschaulichung der nichteuklidischen Geometrien auf den Flächen konstanter Krümmung anbelangt, so besitzen wir zwar in der Kugel ein halbwegs entsprechendes Modell der elliptischen Ebene, wenn wir diametral gegenüberliegende Punkte als identisch ansehen. Dagegen liefern die Flächen konstanter negativer Krümmung niemals ein Modell für die vollständige hyperbolische Ebene. Nach einem von Hilbert herrührenden Satz, den wir hier ohne Beweis[1]) anführen, gibt es nämlich keine Fläche des euklidischen $R_3$, die in endlicher, auf der Fläche gemessener Entfernung frei von Singularitäten ist; es kann also eine reguläre derartige Fläche stets nur einen Teil der hyperbolischen Ebene darstellen.

Wir werden in § 4 B noch die zur Veranschaulichung besonders beliebten Drehflächen konstanter Krümmung bestimmen.

## § 3. Minimalflächen.

In IV, § 4 definierten wir die Minimalflächen als jene Flächen, deren mittlere Krümmung $H$ verschwindet, und fanden eine wichtige Eigenschaft: Ihre sphärische Abbildung ist konform. Eine weitere charakteristische Eigen-

1) Vgl. L. Bieberbach, *Hilberts Satz über Flächen konstanter negativer Krümmung*, Acta mathematica 48 (1926), S. 319—327.

schaft ist die, daß auf einer Minimalfläche die ametrischen Kurven ein konjugiertes Netz bilden (IV, § 5).

Wir wollen hier zunächst von einer anderen Fragestellung ausgehen, die uns auch die Bezeichnung „Minimalflächen" rechtfertigen wird. Sei $C$ eine geschlossene stetige Raumkurve ohne mehrfache Punkte. Wir denken uns durch $C$ alle zweimal stetig differenzierbaren Flächen gelegt, auf denen $C$ einen einfach zusammenhängenden Bereich berandet, und fragen uns nach der Fläche, auf der dieser Bereich den kleinsten Inhalt besitzt. Diese Aufgabe wird als *Plateausches Problem* bezeichnet. Rechnerisch ist das Problem nur für besonders einfache Kurven $C$ gelöst[1]), dagegen lassen sich die Lösungen näherungsweise physikalisch realisieren, wenn man sich die Kurve $C$ aus dünnem Draht herstellt und diesen in eine wässerige Seifenlösung taucht. Es bildet sich eine dünne Haut, die wegen der Oberflächenspannung ziemlich genau die Gestalt der Lösungsfläche für die Randkurve $C$ annimmt.

Das Problem weist jedenfalls eine weitgehende Analogie mit dem der Bestimmung der Geodätischen einer Fläche (VI, § 3) auf und in der Tat führt uns ein ähnlicher Rechnungsgang auch hier wenigstens zu notwendigen Bedingungen. Sei

$$x_i = x_i(u_1, u_2) \tag{1}$$

die lösende Fläche des PLATEAUschen Problems für die gegebene Randkurve $C$. Wir denken sie uns als Fläche $\varepsilon = 0$ in eine Schar von Vergleichsflächen $x_i = x_i(u_1, u_2, \varepsilon)$ eingebettet. Der Bequemlichkeit halber heben wir im folgenden nur die Abhängigkeit von $\varepsilon$ durch die Schreibweise $x_i(\varepsilon)$, $g(\varepsilon)$, $g_{\alpha\beta}(\varepsilon)$ usw. hervor und schreiben außerdem, wo kein Mißverständnis zu befürchten ist, $x_i$ statt $x_i(0)$ usw. Die Schar der Vergleichsflächen nehmen wir in der besonders einfachen Form

$$x_i(\varepsilon) = x_i + \varepsilon\left(\lambda^\mu \frac{\partial x_i}{\partial u_\mu} + \sigma \nu_i\right) \tag{2}$$

an. Dabei ist (1) als zweimal stetig differenzierbar angenommen; $\lambda^1$, $\lambda^2$, $\sigma$ seien beliebige, in allen Punkten von (1) einschließlich des Randes $C$ definierte, stetig differenzierbare Funktionen, und zwar die beiden $\lambda^\mu$ die kontravarianten Komponenten eines Flächenvektors und $\sigma$ ein Skalar. Der Raumvektor (wir heben Ableitungen nach $\varepsilon$ durch das Symbol $\delta$ hervor)

$$\frac{\delta x_i(\varepsilon)}{\delta \varepsilon} = \lambda^\mu \frac{\partial x_i}{\partial u_\mu} + \sigma \nu_i \tag{3}$$

---

1) Ist $C$ eine ebene Kurve, so ist die lösende Fläche offenbar die Ebene von $C$; dieser triviale Fall ist natürlich ohne jedes Interesse.

definiert dann eine umkehrbar eindeutige Zuordnung der Punkte von (1) und der Vergleichsflächen (2). Wir setzen weiter voraus, daß alle Vergleichsflächen (2) ebenfalls durch die Kurve $C$ gehen, so daß längs $C$

$$\lambda^\mu = 0, \quad \sigma = 0 \tag{4}$$

gilt. Ferner begrenze $C$ auf allen Vergleichsflächen (2) einen einfach zusammenhängenden Bereich $B$. Dann ist

$$o(\varepsilon) = \iint\limits_B \sqrt{g(\varepsilon)}\, du_1\, du_2 \tag{5}$$

der Inhalt von $B$ auf einer Vergleichsfläche (2) und somit

$$\frac{\delta o(0)}{\delta \varepsilon} = \iint\limits_B \frac{1}{2\sqrt{g(0)}} \frac{\delta g(0)}{\delta \varepsilon}\, du_1\, du_2 = 0 \tag{6}$$

eine notwendige Bedingung dafür, daß (1) von allen Flächen (2) die kleinste Oberfläche besitzt. Aus (2) folgt

$$\frac{\partial x_i(\varepsilon)}{\partial u_\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} + \varepsilon\left(\frac{\mathfrak{d}\lambda^\mu}{\mathfrak{d}u_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial u_\mu} + \lambda^\mu \frac{\mathfrak{d}^2 x_i}{\mathfrak{d}u_\alpha \mathfrak{d}u_\mu} + \frac{\partial \sigma}{\partial u_\alpha} v_i + \sigma \frac{\partial v_i}{\partial u_\alpha}\right) \tag{7}$$

oder wegen (IV, 1, 27) und (V, 4, 8)

$$\frac{\partial x_i(\varepsilon)}{\partial u_\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} + \varepsilon\left[\left(\frac{\mathfrak{d}\lambda^\mu}{\mathfrak{d}u_\alpha} - \sigma b_\alpha^\mu\right)\frac{\partial x_i}{\partial u_\mu} + \left(\lambda^\mu b_{\alpha\mu} + \frac{\partial \sigma}{\partial u_\alpha}\right) v_i\right]. \tag{8}$$

Für den Maßtensor der Vergleichsflächen erhält man daraus

$$g_{\alpha\beta}(\varepsilon) = g_{\alpha\beta} + \varepsilon\left(-2\sigma b_{\alpha\beta} + \frac{\mathfrak{d}\lambda_\beta}{\mathfrak{d}u_\alpha} + \frac{\mathfrak{d}\lambda_\alpha}{\mathfrak{d}u_\beta}\right) + \varepsilon^2(\ldots). \tag{9}$$

Wir berechnen nun unter Benützung der am Schluß von III, § 4 zusammengestellten Formeln die Diskriminante $g(\varepsilon)$ von (9):

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{2} g(0)\, \varepsilon^{\alpha\gamma}(0)\, \varepsilon^{\beta\delta}(0)\, g_{\alpha\beta}(\varepsilon)\, g_{\gamma\delta}(\varepsilon)$$

$$= \frac{1}{2} g\, \varepsilon^{\alpha\gamma} \varepsilon^{\beta\delta}\left[g_{\alpha\beta} + \varepsilon\left(-2\sigma b_{\alpha\beta} + \frac{\mathfrak{d}\lambda_\beta}{\mathfrak{d}u_\alpha} + \frac{\mathfrak{d}\lambda_\alpha}{\mathfrak{d}u_\beta}\right) + \varepsilon^2(\ldots)\right]$$

$$\left[g_{\gamma\delta} + \varepsilon\left(-2\sigma b_{\gamma\delta} + \frac{\mathfrak{d}\lambda_\delta}{\mathfrak{d}u_\gamma} + \frac{\mathfrak{d}\lambda_\gamma}{\mathfrak{d}u_\delta}\right) + \varepsilon^2(\ldots)\right]$$

und erhalten nach einfachen Rechnungen

$$g(\varepsilon) = g + 2\varepsilon g\left(-\sigma H + \frac{\mathfrak{d}\lambda^\alpha}{\mathfrak{d}u_\alpha}\right) + \varepsilon^2(\ldots). \tag{10}$$

Daraus folgt

$$\frac{\delta g(\varepsilon)}{\delta \varepsilon} = 2g\left(-\sigma H + \frac{\mathfrak{d}\lambda^\alpha}{\mathfrak{d}u_\alpha}\right) + \varepsilon(\ldots) \tag{11}$$

und

$$\frac{\delta o(\varepsilon)}{\delta \varepsilon} = \iint\limits_B \frac{g(0)}{\sqrt{g(\varepsilon)}}\left(-\sigma H + \frac{\mathfrak{d}\lambda^\alpha}{\mathfrak{d}u_\alpha}\right) du_1\, du_2 + \varepsilon \iint\limits_B (\ldots)\, du_1\, du_2, \tag{12}$$

also

$$\frac{\delta o(0)}{\delta \varepsilon} = \iint\limits_B \sqrt{g}\left(-\sigma H + \frac{\mathfrak{d}\lambda^\alpha}{\mathfrak{d}u_\alpha}\right) du_1\, du_2 \tag{13}$$

oder, in zwei Bestandteile zerlegt,

$$\frac{\delta o(0)}{\delta \varepsilon} = -\iint\limits_B \sqrt{g}\,\sigma H\, du_1\, du_2 + \iint\limits_B \sqrt{g}\,\frac{\mathfrak{d}\lambda^\alpha}{\mathfrak{d}u_\alpha}\, du_1\, du_2. \tag{14}$$

Wegen (V, 1, 21) und (V, 2, 10) ergibt sich für das zweite Integral (14)

$$\begin{aligned}\iint\limits_B \sqrt{g}\,\frac{\mathfrak{d}\lambda^\alpha}{\mathfrak{d}u_\alpha}\, du_1\, du_2 &= \iint\limits_B \left(\sqrt{g}\,\frac{\partial\lambda^\alpha}{\partial u_\alpha} + \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u_\alpha}\,\lambda^\alpha\right) du_1\, du_2 \\ &= \iint\limits_B \frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\sqrt{g}\,\lambda^\alpha\right) du_1\, du_2 = \oint\limits_C \varepsilon_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\, du_\beta\,^{1)},\end{aligned} \tag{15}$$

also ist wegen (4)

$$\iint\limits_B \sqrt{g}\,\frac{\mathfrak{d}\lambda^\alpha}{\mathfrak{d}u_\alpha}\, du_1\, du_2 = \oint\limits_C \varepsilon_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\, du_\beta = 0, \tag{16}$$

so daß nur das erste Integral in (14) bleibt. Nach (6) muß also

$$\iint\limits_B \sqrt{g}\,\sigma H\, du_1\, du_2 = \iint\limits_B \sigma H\, do = 0 \tag{17}$$

sein für alle $\sigma$, was nur möglich ist, wenn $H = 0$ ist, d. h. wenn die Fläche (1) eine Minimalfläche ist. In der Ausdrucksweise der Variationsrechnung läßt sich dieses Ergebnis wie folgt formulieren:

*Die Minimalflächen sind die Extremalen des Variationsproblems* (6) *der Oberfläche.*

Wir erinnern nun an die in V, § 4 aufgestellten Ableitungsgleichungen

$$\frac{\mathfrak{d}^2 x_i}{\mathfrak{d}u_\alpha\, \mathfrak{d}u_\beta} = b_{\alpha\beta}\nu_i.$$

Durch Überschiebung mit $g^{\alpha\beta}$ folgt

$$\Delta x_i = g^{\alpha\beta}\frac{\mathfrak{d}^2 x_i}{\mathfrak{d}u_\alpha\, \mathfrak{d}u_\beta} = g^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}\nu_i,$$

wo $\Delta$ der zweite Beltramische Differentiator (V, 2, 16) ist, oder wegen $g^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = 2H$ (IV, 1, 16)

$$\Delta x_i = 2H\nu_i.$$

Für eine Minimalfläche ist also

$$\Delta x_i = 0 \tag{18}$$

1) Der letzte Schritt ist eine Umwandlung des Oberflächenintegrals in ein Randintegral nach dem Gaussschen Integralsatz. Ein Beweis dieses Satzes in allgemeinster Form findet sich im Band II, S. 237.

und die Differentialgleichung $\Delta\psi = 0$ *besitzt Lösungen*, nämlich die Koordinaten $x_i$ selbst. Aus III, § 7 (oder III, § 8 A) folgt, daß sich auf jeder Minimalfläche isotherme Parameter einführen lassen. Nehmen wir an, daß die $u_\alpha$ bereits solche sind, so geht (18) über in die LAPLACEsche Gleichung

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_2^2} = 0, \tag{19}$$

so daß die $x_i$ *Potentialfunktionen*, d. h. die Realteile

$$x_i = \Re\,\varphi_i(u) \tag{20}$$

analytischer Funktionen $\varphi_i$ der komplexen Veränderlichen $u = u_1 + iu_2$ $(i^2 = -1)$ sind. Nun sind aber Potentialfunktionen selbst analytische Funktionen ihrer Argumente[1]), also gilt:

*Es gibt (auch im Reellen) keine nicht analytischen Minimalflächen.*

Jede Minimalfläche läßt sich also ins Komplexe fortsetzen, d. h. nimmt man die $u_\alpha$ als komplexe Veränderliche, so ist $x_i(u_1, u_2)$ in einem gewissen Bereich eine analytische Fläche des komplexen Raumes (vgl. I, § 2). Nach III, § 8 A lassen sich ametrische Parameter $u$, $v$ einführen, und zwar durch die Transformation[2])

$$u = u_1 + iu_2, \quad v = u_1 - iu_2.$$

Daraus folgt[3]) aber, daß

$$y_i = \varphi_i(u)$$

eine ametrische Kurve sein muß, und aus der allgemeinen Darstellung (II, 6, 24) dieser Kurven ergeben sich durch Einsetzen in (20) die für alle reellen Minimalflächen giltigen *Formeln von Weierstraß*

$$\begin{aligned} x_1 &= \Re\, i\left(f - u\dot{f} + \frac{u^2-1}{2}\ddot{f}\right) \\ x_2 &= \Re\left(f - u\dot{f} + \frac{u^2-1}{2}\ddot{f}\right) \\ x_3 &= \Re - i(\dot{f} - u\ddot{f}), \end{aligned} \tag{21}$$

worin $f = f(u)$ eine beliebige analytische Funktion der komplexen Veränderlichen $u = u_1 + iu_2$ ist. Die reellen Funktionen $x_i$ in (21) hängen also von *zwei* reellen Variabeln $u_\alpha$ ab, die *isotherme Flächenparameter* sind.

1) Denkt man sich die $\varphi_i(u)$ nach Potenzen von $u$ entwickelt, so werden Real- und Imaginärteil Potenzreihen in den $u_\alpha$.

2) Bei reellen $u_\alpha$ wäre das überhaupt keine Parametertransformation, da z. B. $u =$ konst. einen Punkt und keine Kurve geben würde!

3) Es ist ja $\Re\varphi_i(u) = \frac{1}{2}[\varphi_i(u) + \bar{\varphi}_i(\bar{u})] = \frac{1}{2}[\varphi_i(u) + \bar{\varphi}_i(v)]$; $v =$ konst. ist eine ametrische Kurve und damit auch $y_i = \varphi_i(u)$.

Wir denken uns nun auf der Minimalfläche im komplexen Raum die ametrischen Parameter $u, v$ eingeführt. (19) geht dann über in

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} = 0. \tag{22}$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet

$$x_i(u, v) = \frac{1}{2}\left(y_i(u) + z_i(v)\right), \tag{23}$$

wobei

$$\dot{y}_i \dot{y}_i = 0, \quad \dot{z}_i \dot{z}_i = 0 \tag{24}$$

ist (die Punkte bedeuten Ableitungen nach den Argumenten). Daraus folgt aber[1]):

*Jede Minimalfläche ist Schiebfläche ametrischer Kurven und umgekehrt ist jede Schiebfläche ametrischer Kurven eine Minimalfläche.* Bei reellen Minimalflächen müssen $y_i$ und $z_i$ konjugiert imaginär sein, wodurch man sofort wieder zu $x_i = \Re y_i(u)$ und zu den Formeln von WEIERSTRASS kommt. Wir bleiben aber zunächst bei beliebigen, d. h. im allgemeinen imaginären Minimalflächen (23), (24) des komplexen Raumes und führen auf den beiden Kurven $y_i$ und $z_i$ nach (II, 6, 31) die invarianten Parameter $p$ bzw. $q$ ein.[2]) Für den Normalenvektor $\nu_i$ ergibt sich

$$\nu_i = i\,\frac{\varepsilon_{ikl}\, y_k' z_l'}{y_i' z_i'}, \tag{25}$$

wobei die Striche Ableitungen nach $p$ bzw. $q$ bedeuten. Seine Ableitungen müssen sich linear durch $y_i'$ und $z_i'$ darstellen lassen; wir setzen etwa

$$\frac{\partial \nu_i}{\partial p} = a y_i' + b z_i'. \tag{26}$$

Nun folgt aus $\nu_i z_i' = 0$ durch Differentiation nach $p$

$$\frac{\partial \nu_i}{\partial p} z_i' = 0,$$

also ist $a = 0$. Ebenso folgt aus $\nu_i y_i' = 0$

$$\frac{\partial \nu_i}{\partial p} y' = -\nu_i y_i'' = b\, y_i' z_i',$$

so daß wegen (25) und $\varepsilon_{ikl}\, y_i'\, y_k'' = -y_l'$ (II, 6, 34)

$$b = -\frac{\nu_i y_i''}{y_i' z_i'} = i\,\frac{\varepsilon_{ikl}\, y_i'\, y_k''\, z_l'}{(y_i' z_i')^2} = -i\,\frac{1}{y_i' z_i'}$$

---

1) Vgl. die Anmerkung S. 132. Die Übertragung des Begriffes Schiebfläche auf den komplexen Raum ist natürlich zulässig.

2) Vgl. E. STUDY, Leipziger Berichte 63, 1911 und W. BLASCHKE, *Differentialgeometrie* Bd. 1 (1. Aufl. 1921), S. 168.

wird. Also ist (26)

$$\frac{\partial v_i}{\partial p} = -i \frac{z_i'}{y_i' z_i'} \tag{27}$$

und analog

$$\frac{\partial v_i}{\partial q} = i \frac{y_i'}{y_i' z_i'}. \tag{28}$$

Für die drei Grundformen der Minimalfläche erhält man nun wegen (23), (27) und (28)

$$g_{\alpha\beta} du_\alpha du_\beta = \quad dx_i dx_i = \tfrac{1}{2} y_i' z_i' dp\, dq, \tag{29}$$

$$b_{\alpha\beta} du_\alpha du_\beta = -dx_i dv_i = \frac{i}{2}(dp^2 - dq^2), \tag{30}$$

$$c_{\alpha\beta} du_\alpha du_\beta = \quad dv_i dv_i = \frac{2dp\, dq}{y_i' z_i'}. \tag{31}$$

Nun ist nach (IV, 4, 17) wegen $H = 0$

$$c_{\alpha\beta} + K g_{\alpha\beta} = 0.$$

Daraus folgt wegen (29) und (31)

$$K = -\frac{4}{(y_i' z_i')^2}. \tag{32}$$

Aus (30) entnehmen wir, daß die Kurven

$$p \pm q = \textbf{konst.} \tag{33}$$

die *Asymptotenlinien* von (23) sind. Führen wir ferner $\varrho = p + iq$ und $\sigma = p - iq$ als Parameter ein, so erhalten wir aus (29) und (30)

$$\frac{y_i' z_i'}{8i}(d\varrho^2 - d\sigma^2) \quad \text{und} \quad \frac{i}{4}(d\varrho^2 + d\sigma^2). \tag{34}$$

In diesen Parametern ist also $g_{12} = b_{12} = 0$, d. h. sie sind zugleich orthogonal und konjugiert und somit Krümmungsparameter. Daher sind

$$p \pm iq = \textbf{konst.} \tag{35}$$

die Gleichungen der *Krümmungslinien* von (23).

Wir betrachten nun wieder die *reelle* Minimalfläche (21). Wie schon erwähnt, ergibt sich (21) aus (23) für

$$y_i = \bar{z}_i, \quad u = \bar{v}, \quad p = \bar{q}. \tag{36}$$

Da nach (II, 6, 32)

$$p = \int \sqrt{\dot{\bar{f}}(u)}\, du \tag{37}$$

ist, sind wegen (33) und (35)

$$\Re \int \sqrt{\dot{\bar{f}}(u)}\, du = \textbf{konst.}, \quad \Re i \int \sqrt{\dot{\bar{f}}(u)}\, du = \textbf{konst.} \tag{38}$$

die *Asymptotenlinien* und[1])

$$(39)\qquad \Re\int\sqrt{i\dot{\bar{f}}(u)}\,du = \text{konst.},\quad \Re\int\sqrt{-i\dot{\bar{f}}(u)}\,du = \text{konst.}$$

die *Krümmungslinien* von (21).

Wir bestimmen noch den Normalenvektor der Minimalfläche (21). Nach (II, 6, 25) ist der Tangentenvektor der ametrischen Kurve (II, 6, 24) parallel zum Vektor

$$(40)\qquad [-2u_1u_2 + i(u_1^2 - u_2^2 - 1)]\,\delta_{1i} + [(u_1^2 - u_2^2 + 1) + 2iu_1u_2]\,\delta_{2i} + 2(-u_2 + iu_1)\,\delta_{3i} = \xi_i + i\eta_i.$$

Die beiden reellen Vektoren $\xi_i$ und $\eta_i$ sind jedenfalls Tangentenvektoren von (36); da sie aufeinander senkrecht stehen und ihre Längen

$$(41)\qquad \sqrt{\xi_i\xi_i} = \sqrt{\eta_i\eta_i} = u_1^2 + u_2^2 + 1$$

sind, ist $(u_1^2 + u_2^2 + 1)^2\,\nu_i = \varepsilon_{ikl}\,\xi_k\,\eta_l$ oder ausführlicher

$$(42)\qquad \nu_1 = \frac{2u_1}{u_1^2+u_2^2+1},\quad \nu_2 = \frac{2u_2}{u_1^2+u_2^2+1},\quad \nu_3 = \frac{1-u_1^2-u_2^2}{u_1^2+u_2^2+1}.$$

Nun rechnet man leicht nach, daß diese Formeln nichts anderes sind als die Abbildungsgleichungen für die stereographische Projektion der Ebene $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2$, $x_3 = 0$ aus dem Punkt $(0, 0, -1)$ auf die Einheitskugel $\nu_i\nu_i = 1$. *Also ist der Normalenvektor $\nu_i$ der Minimalfläche* (36) *der Ortsvektor des dem Punkt $u = u_1 + iu_2$ durch stereographische Projektion entsprechenden Punktes der Einheitskugel.* Daraus folgt weiter:

*Ist auf einer Minimalfläche ein durch eine Kurve $C$ begrenzter Bereich $B$ gegeben und deutet man die komplexe Veränderliche $u$ in einer Gaußschen Zahlenebene, so ist der Bereich $B'$, der in der $u$-Ebene dem Bereich $B$ entspricht, ein konformes Bild von $B$.* Denn jede Minimalfläche ist konform auf ihr sphärisches Bild bezogen (oder wird durch parallele Normalen konform auf die Einheitskugel abgebildet) und diese wieder durch die obige stereographische Abbildung konform auf die $u$-Ebene.

Denken wir uns unsere Minimalfläche nun auf den natürlichen Parameter $p$ bezogen und letzteren ebenfalls in einer Gaussschen Zahlenebene gedeutet, so entspricht dem Bereich $B$ in der $p$-Ebene ein Bereich $B''$, der ein konformes Bild von $B$ und somit auch von $B'$ ist; die Abbildung $B'' \to B'$ wird dabei durch die analytische Funktion (37) vermittelt.

---

1) Aus $p \pm iq = p \pm i\bar{p}$ folgt zunächst, daß die Krümmungslinien von (21) dadurch gegeben sind, daß man Summe und Differenz von Real- und Imaginärteil von $\int\sqrt{\dot{\bar{f}}(u)}\,du$ gleich Konstanten setzt. Wegen $\sqrt{\pm i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$ sind diese Gleichungen aber mit (39) äquivalent. Bemerkt sei, daß in manchen Darstellungen (z. B. Darboux, Bianchi) $2if(u)$ an Stelle von $f(u)$ steht, wodurch sich die Formeln (38) und (39) vertauschen.

Damit läßt sich aber nun das PLATEAUsche Problem auf ein anderes zurückführen: Gelingt es nämlich, allein aus der gegebenen Randkurve $C$ die beiden Bereiche $B'$ und $B''$ sowie jene analytische Funktion $p=\varphi(u)$ zu ermitteln, die $B'$ konform auf $B''$ abbildet, so ist die Lösungsfläche des PLATEAUschen Problems mit der Randkurve $C$ bestimmt; man hat ja nur $\mathfrak{f}(u)$ aus

$$\varphi(u)=\int\sqrt{\ddot{\mathfrak{f}}(u)}\,du$$

zu bestimmen und in die Parameterdarstellung (36) einzuführen.

Über die Bereiche $B'$ und $B''$ lassen sich nähere Angaben machen, wenn die gegebene Randkurve $C$ aus lauter Geraden besteht. Das sphärische Bild einer Geraden ist stets (d. h. nicht nur bei Minimalflächen) ein Hauptkreisbogen[1]), und ein solcher geht bei der stereographischen Projektion über in einen Kreis (der auch in eine Gerade ausarten kann), der mit dem Äquatorkreis $u_1^2+u_2^2=1$ zwei diametral gegenüberliegende Punkte gemeinsam hat. Der Bereich $B'$ ist also ein aus lauter derartigen Kreisbogen zusammengesetztes Polygon. Wesentlich mehr läßt sich über $B''$ sagen. Da jede Gerade einer Fläche Asymptotenlinie ist und, wenn $p=\varrho+i\sigma$ gesetzt wird, die Asymptotenlinien nach (38) durch $\varrho=$ konst. oder $\sigma=$ konst. gegeben sind, besteht die Begrenzung von $B''$ aus lauter achsenparallelen Geraden. Für den Fall, daß $C$ aus vier Kanten eines regelmäßigen Tetraeders besteht, hat SCHWARZ das Problem vollständig gelöst und die nach ihm benannte Minimalfläche gefunden, die sich aus (36) ergibt, wenn man

$$\ddot{\mathfrak{f}}(u)=\frac{i}{2\sqrt{1-14u^4+u^8}}$$

setzt.[2])

1) Die Ebene eines solchen Bogens ist stets senkrecht zur entsprechenden Geraden!

2) Auf eine ausführlichere Behandlung dieser Fläche müssen wir hier verzichten; der Leser findet eine solche in den Büchern von DARBOUX (Bd. I) und BIANCHI und möge sich hier mit den folgenden Andeutungen begnügen. Das Viereck $C$ besitzt zwei Symmetrieebenen, die auch Symmetrieebenen der gesuchten Fläche sein müssen und diese in vier direkt oder spiegelbildlich kongruente Dreiecke zerlegen. Nach einem im folgenden zu beweisenden Satz ist jede Gerade einer Minimalfläche eine Symmetrieachse der Fläche, so daß sich diese durch derartige Spiegelungen „fortsetzen" läßt. Im sphärischen Bild entsprechen den eben erwähnten vier Dreiecken vier sphärische, von lauter Hauptkreisen begrenzte Dreiecke, die in denselben Symmetrieverhältnissen stehen, sich durch Spiegelungen ebenfalls fortsetzen lassen und somit einer Einteilung der Kugelfläche in lauter direkt oder spiegelbildlich kongruente Dreiecke angehören müssen. Es gibt nun im wesentlichen nur eine endliche Anzahl derartiger Einteilungen der Kugelfläche, die sich ohne besondere Schwierigkeiten ermitteln lassen (vgl. etwa die Darstellung des Verfassers im Handbuch der Physik, Bd. 3, S. 72, Berlin 1928). Die vorliegende Einteilung ist das sogenannte Oktaedernetz. Damit ist der Bereich $B'$ bestimmt. Der Bereich $B''$ ist ein Quadrat; die vier Dreiecke, in die dieses durch seine Diagonalen zerlegt wird, entsprechen den oben angegebenen Dreiecken auf der gesuchten Fläche.

Wir wollen uns zum Schluß noch einige von SCHWARZ herrührende Formeln herleiten, aus denen sich weitere bemerkenswerte Eigenschaften der Minimalflächen entnehmen lassen. Aus (IV, 3, 13) folgt, daß $H = 0$ äquivalent ist mit

$$\varepsilon_{ikl}\,(x_{i1}\,\nu_{k2} + \nu_{i1}\,x_{k2}) = 0. \tag{43}$$

Dabei haben wir der Kürze halber die Differentiationen durch angehängte Indizes angedeutet. Der Ausdruck

$$\varepsilon_{ikl}\,\nu_i\,dx_k = \varepsilon_{ikl}\,\nu_i x_{k\alpha}\,du_\alpha \tag{44}$$

ist wegen (43) ein *vollständiges Differential*. In der Tat wird die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial u_1}(\varepsilon_{ikl}\nu_i x_{k2}) - \frac{\partial}{\partial u_2}(\varepsilon_{ikl}\nu_i x_{k1}) = 0$$

nach Ausführung der Differentiationen

$$\varepsilon_{ikl}\,(\nu_{i1}\,x_{k2} - \nu_{i2}\,x_{k1}) = 0;$$

vertauscht man im zweiten Glied $i$ und $k$ unter gleichzeitiger Änderung des Vorzeichens, so ergibt sich (43). Damit haben wir die charakteristische Eigenschaft:

*Auf einer Minimalfläche ist das Integral* $\int \varepsilon_{ikl}\,\nu_i\,dx_k$ *vom Weg unabhängig.*

Nach (23) und (25) ist in invarianten Parametern $p$, $q$

$$\nu_i = i\,\frac{\varepsilon_{ihj}\,dy_h\,dz_j}{dy_j dz_j}, \quad dx_k = \frac{1}{2}(dy_k + dz_k), \tag{45}$$

also wird

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ikl}\nu_i\,dx_k &= \frac{i}{2\,dy_j dz_j}\,\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{ihj}\,(dy_k + dz_k)\,dy_h dz_j \\
&= \frac{i}{2\,dy_j dz_j}\,(\delta_{kh}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{lh})\,(dy_k + dz_k)\,dy_h dz_j \\
&= \frac{i}{2\,dy_j dz_j}\,(dy_k dz_k dz_l - dy_k dz_k dy_l),
\end{aligned}$$

somit

$$\varepsilon_{ikl}\nu_i\,dx_k = \frac{i}{2}\,(dz_l - dy_l). \tag{46}$$

Daraus und aus der zweiten Gleichung (45) folgt

$$\begin{aligned}
dy_i &= dx_i + i\,\varepsilon_{ikl}\,\nu_k\,dx_l \\
dz_i &= dx_i - i\,\varepsilon_{ikl}\,\nu_k\,dx_l
\end{aligned} \tag{47}$$

und weiter durch Integration

$$\begin{aligned}
y_i &= x_i + i\int \varepsilon_{ikl}\nu_k\,dx_l \\
z_i &= x_i - i\int \varepsilon_{ikl}\nu_k\,dx_l.
\end{aligned} \tag{48}$$

Aus diesen Formeln entnimmt man fast unmittelbar den *Satz von Björling: Eine Minimalfläche ist durch einen analytischen Streifen eindeutig bestimmt.*

Genauer: Es ist eine Kurve $C$, etwa durch ihre Parameterdarstellung $x_i = x_i(t)$, und längs $C$ ein jeweils zu $C$ senkrechter Vektor $\nu_i(t)$ gegeben; die $x_i(t)$ und $\nu_i(t)$ sind dabei als analytische Funktionen vorauszusetzen. Dann gibt es eine und nur eine Minimalfläche, die durch $C$ geht und längs $C$ den Normalenvektor $\nu_i(t)$ hat. Erstreckt man die Integrale in (48) längs $C$, so ergeben sich zwei wegen (47) ametrische Kurven $y_i(t)$, $z_i(t)$ und aus (23) die gesuchte Minimalfläche

$$2X_i(u,v) = y_i(u) + z_i(v) = x_i(u) + x_i(v) + i\int^{u} \varepsilon_{ikl}\nu_k\,dx_l - i\int^{v} \varepsilon_{ikl}\nu_k\,dx_l. \tag{49}$$

Ist der Streifen reell, so sind $y_i$ und $z_i$ konjugiert imaginär und man kommt wieder zu den bekannten Darstellungen der reellen Minimalflächen in der Form $x_i = \Re y_i(t)$.

Eine Ausnahme erleidet der Satz, wenn längs $C$ entweder $dy_i$ oder $dz_i$ verschwindet. Offenbar muß dann $C$ selbst ametrisch sein. Ferner ist zu bemerken, daß durch einen *geschlossenen* Streifen im allgemeinen *keine* Minimalfläche gelegt werden kann.

Zwei wichtige Folgerungen aus dem Satz von BJÖRLING sind:

*Enthält eine Minimalfläche eine Gerade $g$, so ist $g$ eine Symmetrieachse der Fläche.*

*Enthält eine Minimalfläche eine ebene Geodätische $C$, so ist die Ebene von $C$ eine Symmetrieebene der Fläche.*

Zum Nachweis des ersten Satzes denke man sich die Fläche $F$ an $g$ gespiegelt; die sich so ergebende Fläche $\overline{F}$ hat längs $g$ dieselben Normalen wie die ursprüngliche, also mit $F$ einen Streifen gemeinsam und muß also mit ihr identisch sein. Was den zweiten Satz betrifft, so liegen die Flächennormalen längs einer ebenen Geodätischen $C$ in der Ebene von $C$; durch Spiegelung der Fläche an dieser Ebene entsteht also eine Fläche, die mit der ursprünglichen wieder einen Streifen gemeinsam hat und daher mit ihr identisch ist.

Als letzte ist noch eine Formel für den Inhalt $o$ eines von einer stetigen, doppelpunktfreien und geschlossenen Kurve $C$ begrenzten Bereiches $B$ einer Minimalfläche zu erwähnen. Wir gehen von der Formel

$$\sqrt{g} = \varepsilon_{ikl}\nu_i x_{k1} x_{l2} \tag{50}$$

aus, die sich aus (III, 1, 29) durch Überschiebung mit $\nu_i$ ergibt. An Stelle von (50) können wir aber wegen (43) auch, wie man leicht nachrechnet,

$$\sqrt{g} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(\nu_i x_k x_{l2}) - \frac{\partial}{\partial u_2}(\nu_i x_k x_{l1})\right] \tag{51}$$

schreiben. Daraus folgt wegen $o = \iint\limits_B \sqrt{g}\, du_1\, du_2$ durch Umwandlung des Doppelintegrales in ein Randintegral

$$(52) \qquad o = \frac{1}{2} \oint\limits_C \varepsilon_{ikl} v_i x_k \, dx_l .$$

## § 4. Ergänzungen und Aufgaben.

**A. Mongesche Flächen.** Am Schluß von IV, § 2 konnten wir zeigen, daß die Kugeln und Ebenen die einzigen Flächen mit lauter Nabelpunkten sind. Äquivalent damit ist offenbar der Satz: *Die Kugeln und Ebenen sind die einzigen (analytischen) Flächen mit ametrischen Asymptotenlinien,* wie aus der Proportionalität der ersten und zweiten Grundform folgt. Ein Mittelding zwischen diesen und den allgemeinen Flächen wären jene, natürlich ebenfalls analytischen Flächen, auf denen *eine* Schar von Asymptotenlinien aus ametrischen Kurven besteht, deren erste und zweite Grundform somit einen Linearfaktor gemeinsam haben.

Wir zeigen zunächst, daß *jede Schar ametrischer Asymptotenlinien aus (ametrischen) Geraden besteht, d. h. daß jede Fläche mit einer Schar ametrischer Asymptotenlinien eine Regelfläche mit ametrischen Erzeugenden ist.* Wäre nämlich diese Behauptung falsch, so wären die Schmiegebenen der Asymptotenlinien überall eindeutig bestimmt; da sie zugleich Tangentenebenen der Fläche und nach II, § 6 isotrop sind, wäre die Fläche Hüllfläche der $\infty^2$ isotropen Ebenen, die aber (III, § 8 E) keine Fläche, sondern den absoluten Kegelschnitt umhüllen. Damit sind wir bei einem Widerspruch angelangt, unsere obige Behauptung also richtig.

Wir können also die Darstellung

$$(1) \qquad x_i = y_i(u) + t e_i(u)$$

von § 1 auch der Untersuchung der gewöhnlich als *Mongesche Flächen* bezeichneten Regelflächen mit ametrischen Erzeugenden zugrunde legen.[1]) Dabei ist aber jetzt

$$(2) \qquad g_{11} = e_i e_i = 0$$

und da bei jeder Regelfläche (1) nach § 1 auch $b_{11} = 0$ ist, ergibt sich nach (IV, 1, 20)

$$(3) \qquad (g_{12} b_{22} - g_{22} b_{12})\, du^2 = 0$$

1) MONGE hat allerdings nicht diese Flächen, sondern nur die auf ihnen unter gewissen Voraussetzungen vorhandene reelle Kurve als erster untersucht, auf die er bei der Behandlung der Hüllgebilde einparametriger Kugelscharen gestoßen war. Vgl. die Fußnote 2) S. 140.

als Differentialgleichung der Krümmungslinien. Es sind nun folgende Fälle zu unterscheiden, wobei wir zur Abkürzung $A = (g_{12}b_{22} - g_{22}b_{12})$ setzen:

1. $A$ verschwindet identisch: Die Fläche ist nach IV, § 2 eine Kugel oder Ebene.

2. $A$ ist nicht identisch Null, aber von $t$ unabhängig, also $\frac{dA}{dt} = 0$; die Fläche besitzt *eine einzige Schar von Krümmungslinien*, die mit den Erzeugenden zusammenfallen.

3. (Allgemeiner Fall.) Weder $A$ noch $\frac{dA}{dt}$ sind identisch Null. Neben der einen Schar von Krümmungslinien besitzen diese Flächen noch eine *isolierte Krümmungslinie*, die durch $A = 0$ definiert ist.

Aus (1) erhalten wir noch

$$g_{12} = e_i y_i', \quad g = -g_{12}^2 = -(e_i y_i')^2, \quad g^{12} = \frac{1}{e_i y_i'}, \quad g^{22} = 0,$$

$$b = \frac{1}{i\, e_i y_i'} \varepsilon_{ikl}\, e_i\, y_k'\, e_l'.$$

Somit ist
$$g^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = 2 g^{12} b_{12} = \frac{1}{i\,(e_i y_i')^2} \varepsilon_{ikl} e_i y_k' e_l'$$

und aus (IV, 1, 15) ergibt sich die Doppelwurzel

$$\frac{1}{R} = -i \frac{\varepsilon_{ikl}\, e_i\, y_k'\, e_l'}{(e_i y_i')^2}.$$

Es gibt also in jedem Punkt einer Mongeschen Fläche auch nur eine einzige Hauptkrümmung. Daraus folgt zunächst, daß beide Mäntel der Zentrafläche ausarten und in eine einzige Kurve, die Zentrakurve, zusammenfallen und weiter, daß *alle Mongeschen Flächen Hüllflächen einparametriger Kugelscharen sind.*

Es zeigt sich[1]), daß im Fall 2. die Zentrakurve ametrisch ist. Diese Flächen werden gewöhnlich als *Serretsche Flächen* bezeichnet. Sie sind Flächen *konstanter Krümmung* (Hüllflächen von Kugelscharen mit festem Radius). Die isolierte Krümmungslinie fällt bei ihnen mit dem absoluten Kegelschnitt zusammen.

Die Zentrakurve der allgemeinen Mongeschen Flächen ist nicht ametrisch. Der Radius der Krümmungskugeln stimmt bis auf eine additive Konstante mit der Bogenlänge der Zentrakurve überein. Die isolierte Krümmungslinie ist stets eine Filarevolvente der Zentrakurve. Ist diese eine Kurve in einer isotropen Ebene, so ist die isolierte Krümmungslinie eine ametrische Gerade.

---

1) Wegen der Beweise sei auf die Literatur verwiesen; die ausführlichste Darstellung der Mongeschen Flächen gab L. Berwald, Münchner Berichte 1913, S. 143—211. Die Existenz der isolierten Krümmungslinie wurde erst später bemerkt; vgl. E. Müller, Wiener Berichte 1920, S. 377 und A. Duschek, ebenda 1927, S. 407—412.

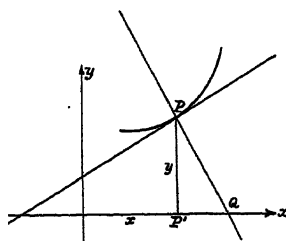



Fig. 14.

Geht man aber umgekehrt von einer gegebenen Kurve $C$ aus und fragt nach allen MONGEschen Flächen, die $C$ als Zentrakurve haben, so sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $C$ eine reguläre, eine ametrische oder eine Kurve in einer isotropen Ebene ist. Im ersten Fall gibt es zwei getrennte Flächenscharen, im zweiten eine Schar, die dann aus lauter SERRETschen Flächen besteht, und endlich im dritten Fall eine einzige Fläche.

**B. Drehflächen konstanter Krümmung.** Für die Hauptkrümmungsradien einer Fläche, die durch Drehung der ebenen Kurve $C$ mit der Gleichung $y = f(x)$ um die $x$-Achse entsteht, ergibt sich (vgl. Fig. 14)

$$'R = PQ = y\sqrt{1+y'^2}, \quad ''R = -\varrho = -\frac{\sqrt{1+y'^2}^3}{y''}, \tag{4}$$

also wird die Krümmung der Fläche

$$K = \frac{1}{'R\,''R} = -\frac{y''}{y(1+y'^2)^2}. \tag{5}$$

Bei konstantem $K$ folgt daraus durch Integration

$$Ky^2 = \frac{1}{1+y'^2} + C$$

oder

$$x = \int \sqrt{\frac{Ky^2-C}{1+C-Ky^2}}\,dy + C'. \tag{6}$$

$C'$ bedeutet hier nur eine Verschiebung längs der Drehachse und ist somit unwesentlich. Für $K > 0$, $C = 0$ ergibt sich der Kreis

$$(x - C')^2 + y^2 = \frac{1}{K},$$

also durch Drehung eine Kugel vom Radius $\frac{1}{\sqrt{K}}$; für $K < 0$ und $C = -1$ die *Traktrix* $\left(K = -\frac{1}{a^2}\right)$

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} + \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y},$$

deren Drehfläche als *Pseudosphäre* bezeichnet wird. Für andere Werte von $C$ ist die rechte Seite von (6) ein elliptisches Integral.

**C. Einige Aufgaben.**

1. Man bestimme die Kehllinie und den Drall der Regelfläche

$$u\delta_{1i} + t(\delta_{2i} + u\delta_{3i}).$$

2. Die durch Umdrehung der Kettenlinie $y = k \operatorname{ch} \frac{z}{k}$ entstehende Fläche (*Katenoid*) ist die einzige reelle Minimaldrehfläche (vgl. Aufgabe 12 in IV, § 6 D).

3. Die Flächenkurven, deren zugehörige Normalenflächen extremen Drall haben, bilden ein Kurvennetz, das bezüglich der Krümmungslinien konjugiert ist und dann und nur dann mit dem Netz der Asymptotenlinien zusammenfällt, wenn die Fläche eine Minimalfläche ist.[1])

4. Die Wendelfläche $x_2 = x_1 \tan(k\, x_3)$ ist die einzige geradlinige Minimalfläche.

5. Verschiebt man eine Drehfläche konstanter Krümmung $K$ längs der Achse, so besteht die Schar der Orthogonalflächen aus kongruenten (ebenfalls längs der Achse verschobenen) Drehflächen der konstanten Krümmung $-K$. Einer Kugelschar ist in dieser Weise eine Schar von Pseudosphären zugeordnet.

6. Es seien $C'$ und $C''$ zwei Fokalparabeln (das sind Parabeln, die in senkrechten Ebenen so liegen, daß der Scheitel der einen mit dem Brennpunkt der anderen zusammenfällt), $P'$ ein beliebiger Punkt von $C'$ und $P''$ ein beliebiger Punkt von $C''$. Die Symmetrieebenen aller Punktepaare $P'$, $P''$ umhüllen eine Minimalfläche, deren Krümmungslinien ebene, und deren Asymptotenlinien Raumkurven dritter Ordnung sind. Sie ergibt sich aus (3, 21) für $\dddot{f}(u) =$ konst. und wird als Minimalfläche von Enneper bezeichnet.

1) Th. Radaković, Monatshefte f. Mathematik u. Physik, 32 (1923), S. 144—147.

# Register.

**Grundlagen der Geometrie.** Von Geh. Reg.-Rat Dr. *D. Hilbert*, Prof. a. d. Univ. Göttingen. 7. Aufl. Mit zahlr. Fig. [ca. VIII u. 272 S.] 8. 1930. (Wiss. u. Hyp. Bd. VII.) Geb. *RM* 11.—

**Die nichteuklidische Geometrie.** Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. Von Dr. *R. Bonola*, weil. Prof. a. d. Univ. Bologna. Aut. deutsche Ausg. besorgt von Dr. *H. Liebmann*, Prof. a. d. Univ. Heidelberg. 3. Aufl. Mit 52 Fig. i. T. [VI u. 207 S.] 8. 1921. (Wiss. u. Hyp. Bd. IV.) Geb. *RM* 5.60

**Die vierte Dimension.** Eine Einführung in das vergleichende Studium der verschiedenen Geometrien. Von Dr. *Hk. de Vries*, Prof. a. d. Univ. Amsterdam. Nach der 2. holländischen Ausgabe ins Deutsche übertragen von Frau Dr. *R. Struik*. Mit 35 Fig. i. T. [IX u. 167 S.] 8. 1926. (Wiss. u. Hyp. Bd. XXIX.) Geb. *RM* 8.—

**Analytische Geometrie.** Von Dr. *L. Bieberbach*, Prof. a. d. Univ. Berlin. Mit 39 Fig. i. T. [IV u. 120 S.] 8. 1930 (Teubn. math. Leitfäden Bd. 29.) Kart. *RM* 6.60

**Analytische Geometrie der Kegelschnitte.** Von *G. Salmon*. Nach der freien Bearbeitung von Dr. *W. Fiedler*, weil. Prof. a. d. Eidgen. Techn. Hochschule in Zürich, neu hrsg. von Geh. Hofrat Dr. *F. Dingeldey*, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Darmstadt.

I. Teil. 9. Aufl. [XXX u. 452 S.] gr. 8. 1922. Geb. *RM* 18.—

II. Teil. 7. Aufl. [X u. 445 S.] gr. 8. 1918. Geh. *RM* 14.60, geb. *RM* 17.—

**Analytische Geometrie des Raumes.** Von *G. Salmon*. Deutsch bearb. von Dr. *W. Fiedler*, weil. Prof. a. d. Eidgen. Techn. Hochschule in Zürich. Unt. Mitw. von Dr. *A. v. Brill*, Prof. a. d. Univ. Tübingen, neu hrsg. von Dr. *K. Kommerell*, Prof. a. d. Univ. Tübingen.

I. Band. 5. Aufl. [X u. 612 S.] gr. 8. 1923. Geb. *RM* 23.—
Auch in 2 Lieferungen:

1. Lieferung: **Die Elemente und die Theorie der Flächen zweiter Ordnung.** 5. Aufl. Mit 48 Fig. [X u. 366 S.] gr. 8. 1922. Geh. *RM* 12.—

2. Lieferung: **Die Elemente und die Theorie der Flächen zweiter Ordnung.** 5. Aufl. Mit 23 Fig. [IV u. 246 S.] gr. 8. 1923. Geh. *RM* 8.—

**Vorlesungen über darstellende Geometrie.** Von Prof. Dr. *F. v. Dalwigk*, München.

I. Band: **Die Methoden der Parallelprojektion.** Mit 184 Fig. [XVI u. 364 S.] gr. 8. 1911. Geb. *RM* 15.—

II. Band: **Perspektive, Zentralkollineation u. Grundzüge d. Photogrammetrie.** Mit üb. 130 Fig. [XI u. 322 S.] gr. 8. 1914. Geh. *RM* 12.—, geb. *RM* 14.—

---

**Vorlesungen über Algebra.** Unt. Benutzung der dritten Aufl. des gleichnamigen Werkes von † Dr. *G. Bauer*. In 4., verm. Aufl. dargest. von Dr. *L. Bieberbach*, Prof. a. d. Univ. Berlin. Mit 16 Fig. i. T. u. auf 1 Taf. [X u. 334 S.] gr. 8. 1928. Geb. *RM* 20.—

**Höhere Algebra.** Autorisierte deutsche Ausg. von *L. E. Dickson* „Modern algebraic theories". Hrsg. von *E. Bodewig*, Köln a. Rh. Mit 3 Fig. [VII u. 242 S.] 8. 1929. Geb. *RM* 14.—

---

**Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin**